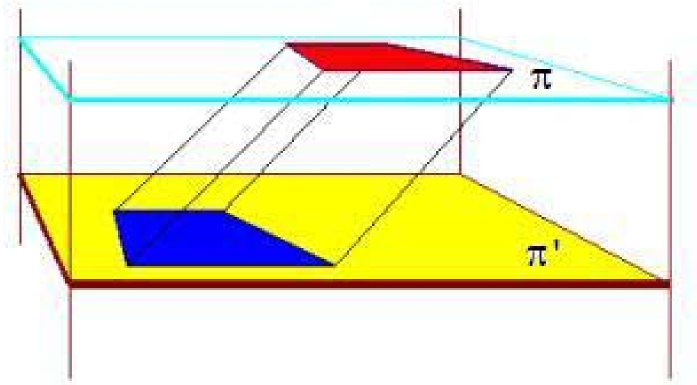
Laboratorio delle Macchine Matematiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
*Ateneo fondato nel 1175*

# Trasformazioni

# Genesi spaziale

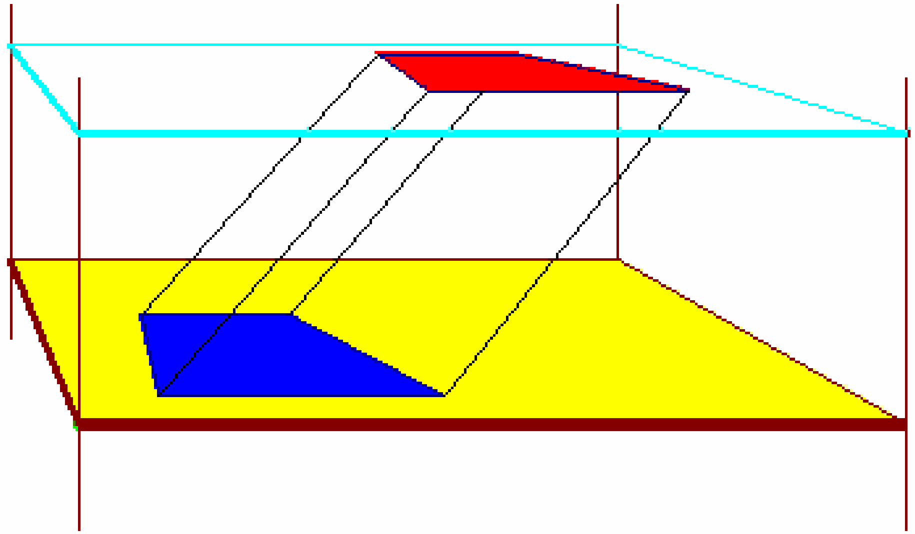



Nel modello fisico, le lastre rettangolari π (trasparente) e π’ rappresentano due piani paralleli.

Il quadrilatero appartenente al piano π’ si può immaginare come ombra solare di quello appartenente al piano π.

In generale, i raggi del sole (paralleli, rappresentati nel modello da fili tesi) stabiliscono una corrispondenza (prospettività con centro improprio) fra i punti dei piani π e π’: ad ogni punto P di π corrisponde in π’ la sua ombra P’.

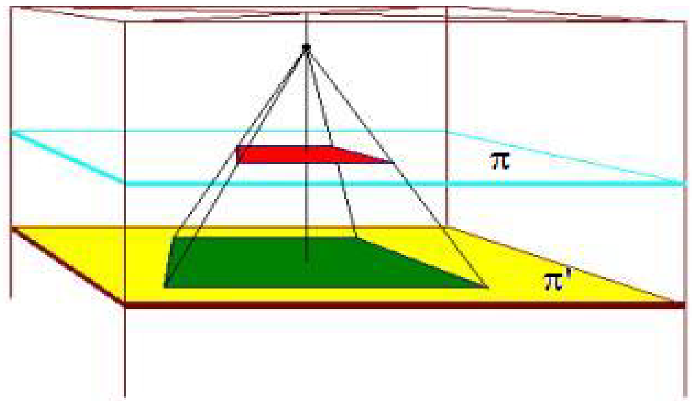
# Genesi spaziale



La macchina permette di sovrapporre i due piani con moto continuo, mantenendoli paralleli e senza ruotarli uno rispetto all’altro: durante tale movimento anche i fili tesi (raggi) conservano il loro parallelismo. Quando i piani sono sovrapposti la corrispondenza fra i loro punti P e P’ diventa una trasformazione geometrica piana che si chiama **traslazione.**

Laboratorio delle Macchine Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

# Genesi spaziale

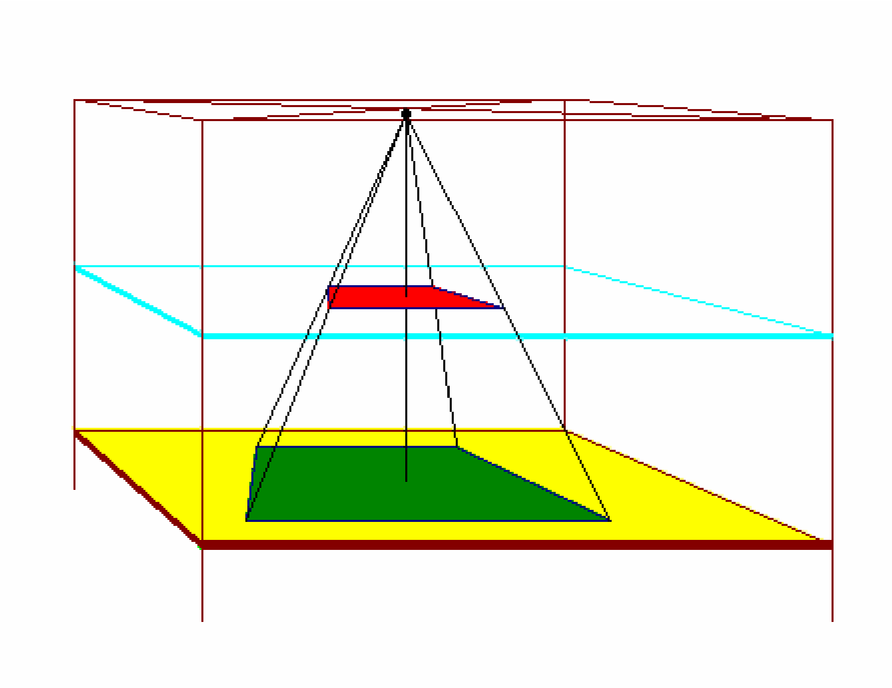



Nel modello fisico, le lastre rettangolari π (trasparente) e π’ rappresentano due piani paralleli.

La figura appartenente a π’ si può considerare come ombra di quella giacente su π, ottenuta per effetto di raggi luminosi (materializzati nel modello mediante fili tesi) provenienti da una sorgente puntiforme posta in O.

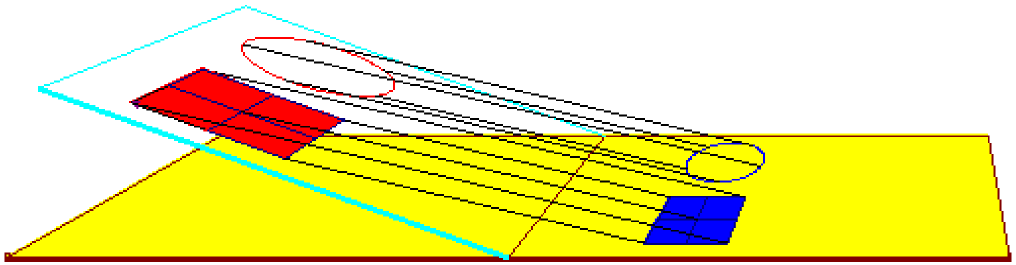
In generale, i raggi uscenti da O determinano una corrispondenza (biunivoca: prospettività con centro proprio) tra i punti di π e π’: ogni punto P di π ha come corrispondente in π’ la propria ombra P’.

# Genesi spaziale



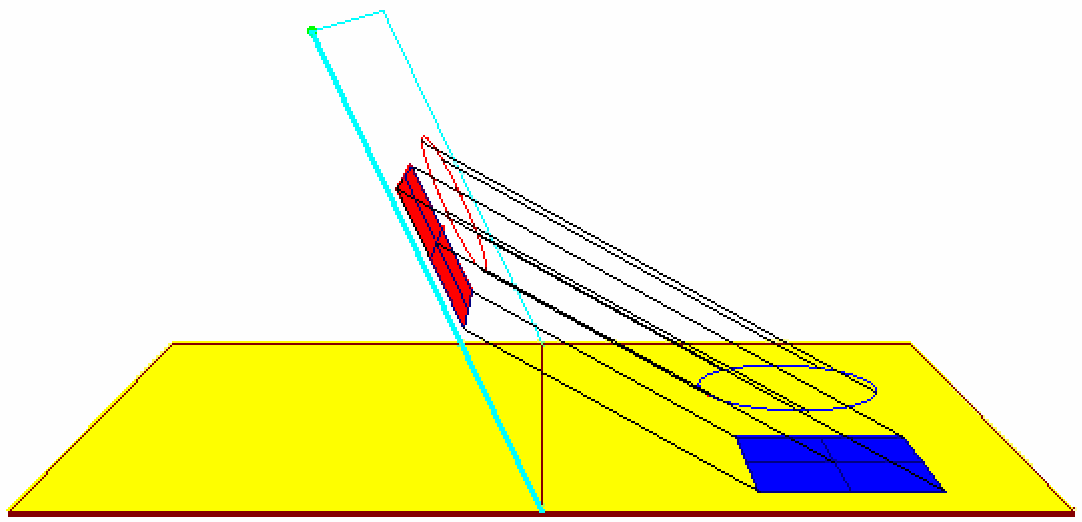
Il meccanismo permette di sovrapporre i due piani con moto continuo, mantenendoli paralleli, evitando ogni rotazione dell’uno rispetto all’altro e conservando l’allineamento con O di ogni coppia P, P’ di punti corrispondenti (quest’ultima condizione richiede che, mentre i piani $\pi$ e $\pi'$ diminuiscono la loro distanza, anche O si sposti avvicinandosi ad essi in modo che il rapporto OP’/OP = k rimanga costante).
Quando i piani sono sovrapposti (in tal caso O giace sul loro comune sostegno) la corrispondenza fra i punti P e P’ è una trasformazione geometrica piana (**omotetia** di centro O e rapporto k).

# Genesi spaziale



Nel modello fisico, le lastre rettangolari π (trasparente) e π’ rappresentano due piani incidenti lungo la retta u. Le figure tracciate su π’ si possono considerare come ombre solari di quelle giacenti su π. I raggi del sole (materializzati nel modello con fili tesi e supposti paralleli) determinano, in generale, una corrispondenza biunivoca (prospettività con centro improprio) tra π e π’: ad ogni punto P di π corrisponde in π’ la sua ombra P’.

# Genesi spaziale



Il modello permette di ruotare $\pi$ attorno alla retta *u*.
Si può osservare che:
- durante la rotazione i raggi (i fili tesi) rimangono paralleli;
- quando $\pi$ è sovrapposto a $\pi'$, i raggi (i fili) che congiungono due punti corrispondenti qualsiasi sono perpendicolari ad u.

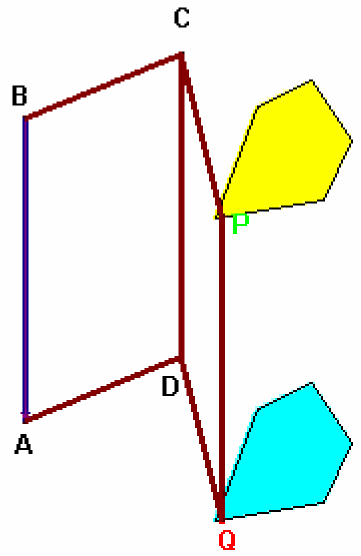
Se $\pi$ e $\pi'$ sono sovrapposti, la corrispondenza esistente fra i loro punti P e P' diventa una trasformazione geometrica nota come **stiramento**(particolare omologia affine).

# Pantografi

Il meccanismo stabilisce una corrispondenza locale tra i punti di due regioni piane limitate collegandole fisicamente, e incorpora le medesime proprietà che caratterizzano la trasformazione. Lo studio dello strumento permetterà quindi di riconoscere il tipo di trasformazione che esso realizza: mentre il puntatore percorre una figura geometrica disegnata su una delle due regioni, il tracciatore disegna sull'altra la figura corrispondente (trasformata). Puntatore e tracciatore possono essere scambiati fra loro (biunivocità della corrispondenza).

# Traslatore

Il traslatore del Kempe si ottiene assemblando due sistemi articolati BCP e ADQ ( ove BC=AD e CP=DQ) mediante tre aste uguali di lunghezza assegnata AB, CD e PQ. AB è fissata al piano. ABCD e CPQD sono quindi due parallelogrammi articolati. Il punto P (tracciatore) ha due gradi di libertà.



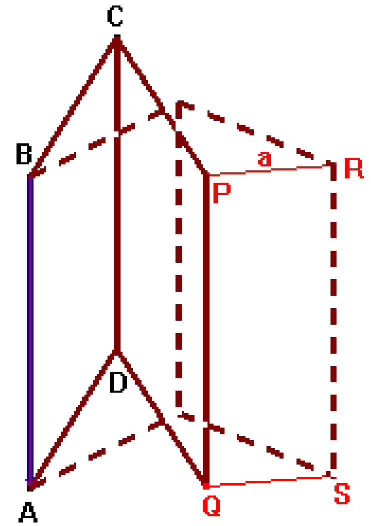

Osservare:

- i gradi di libertà delle cerniere del sistema articolato
- i parametri del sistema che caratterizzano la trasformazione
- i parametri del sistema che caratterizzano le regioni messe in corrispondenza

# Traslatore

Si può osservare che:

- Quando il puntatore percorre un segmento, il tracciatore descrive un segmento parallelo e uguale: in ogni posizione di R sul segmento a, PQRS è un parallelogramma (lati PQ ed RS paralleli e uguali)
- Viene conservato il verso di percorrenza delle figure
- Non esistono punti uniti , esiste un fascio improprio di rette unite.

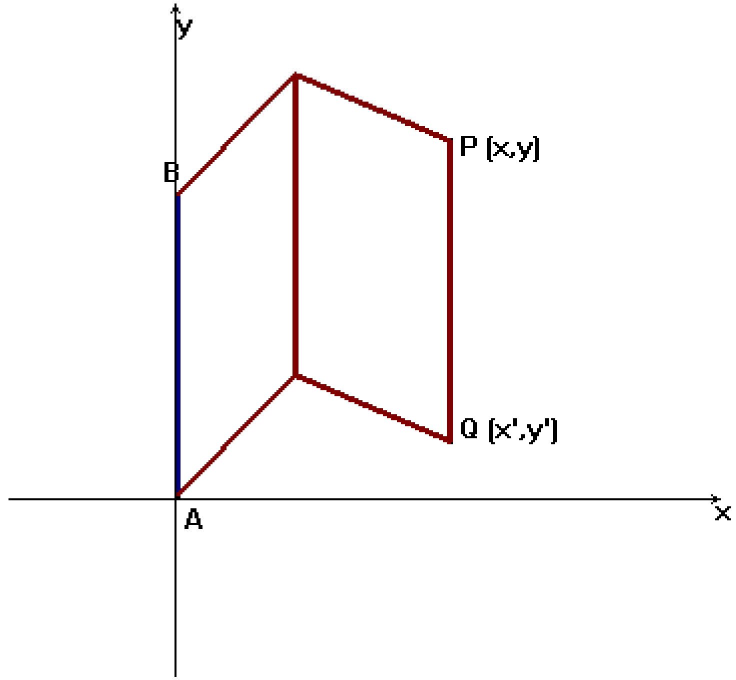


# Traslatore

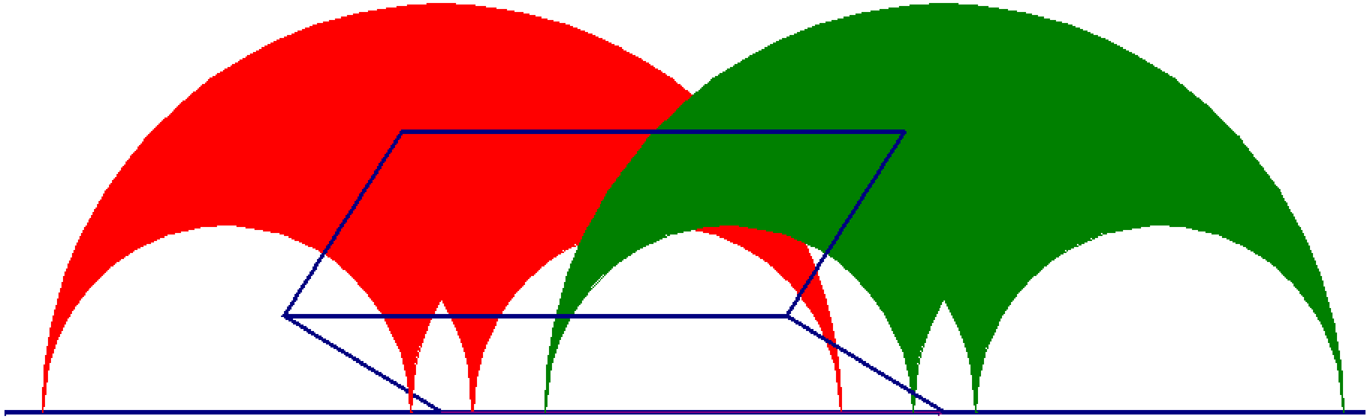
***Equazioni della traslazione***

Sia h la lunghezza di AB.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - h \end{cases}$$

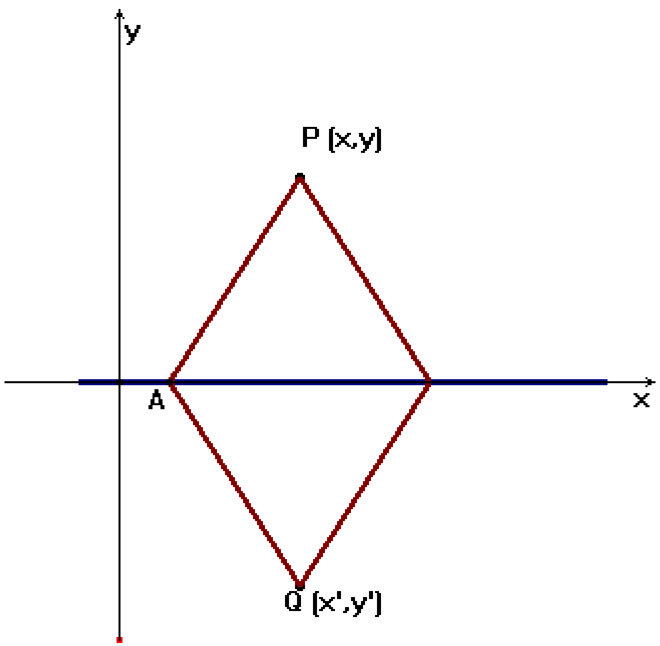


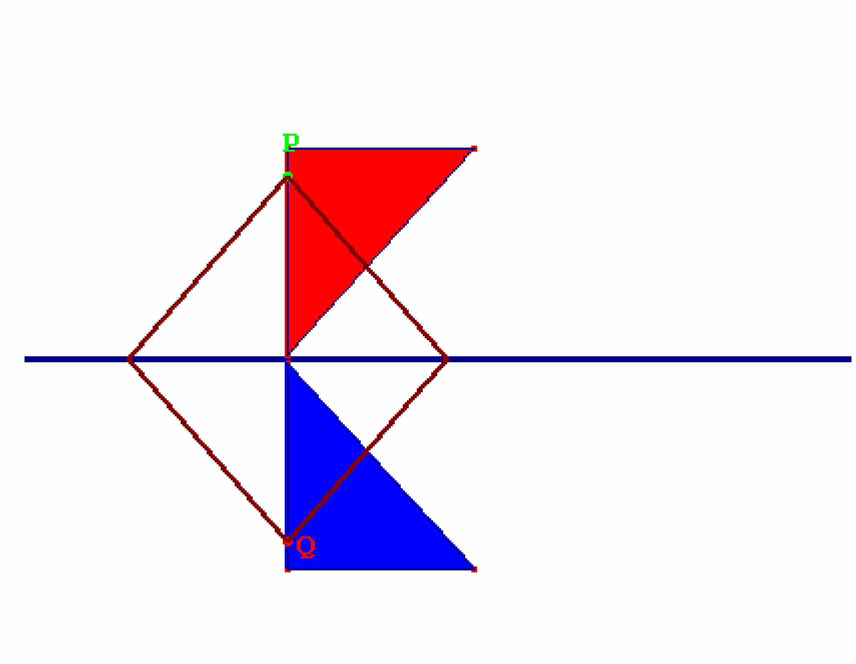
# Traslatore



Esempio di forma delle regioni di piano messe in corrispondenza dal puntatore e dal tracciatore, tenendo conto dei vincoli.

# Simmetria assiale

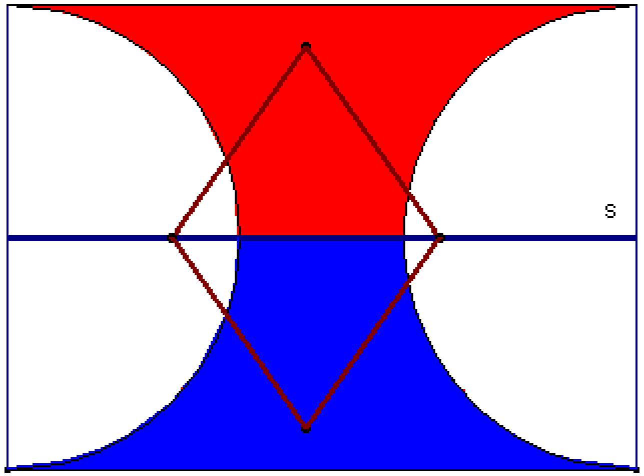



Equazioni:

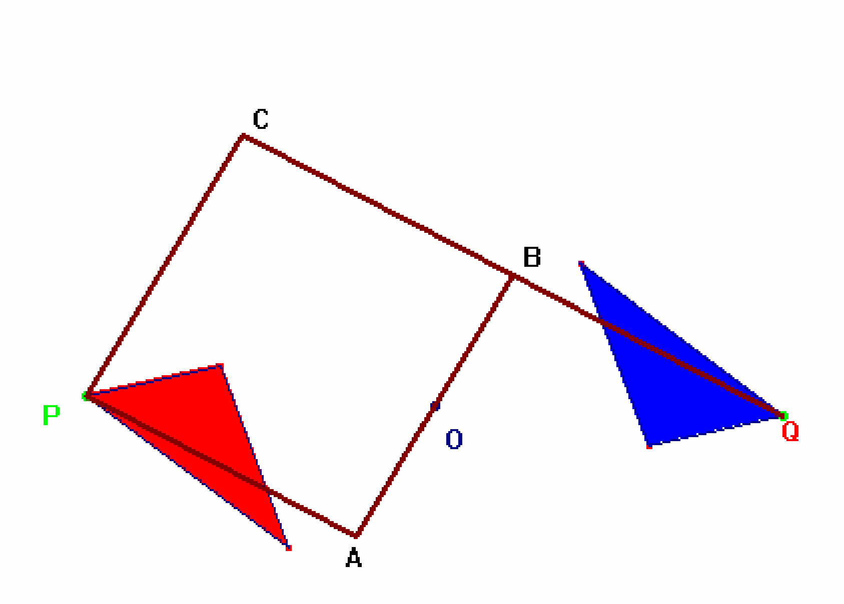
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

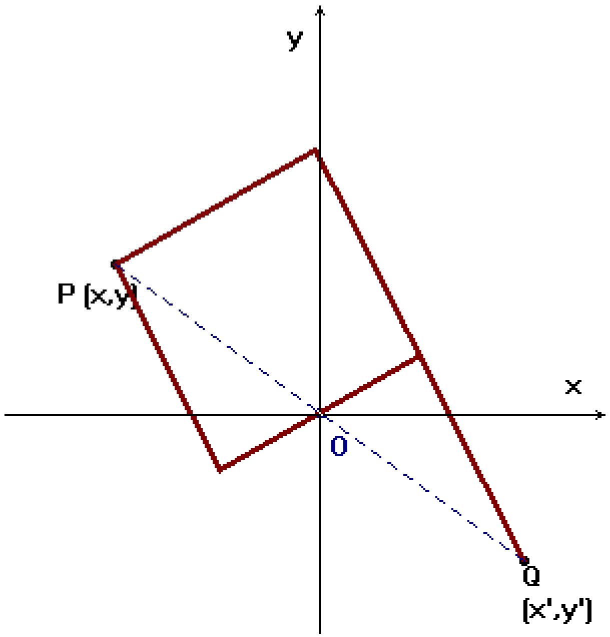
# Simmetria assiale




Regioni piane in corrispondenza

# Simmetria centrale

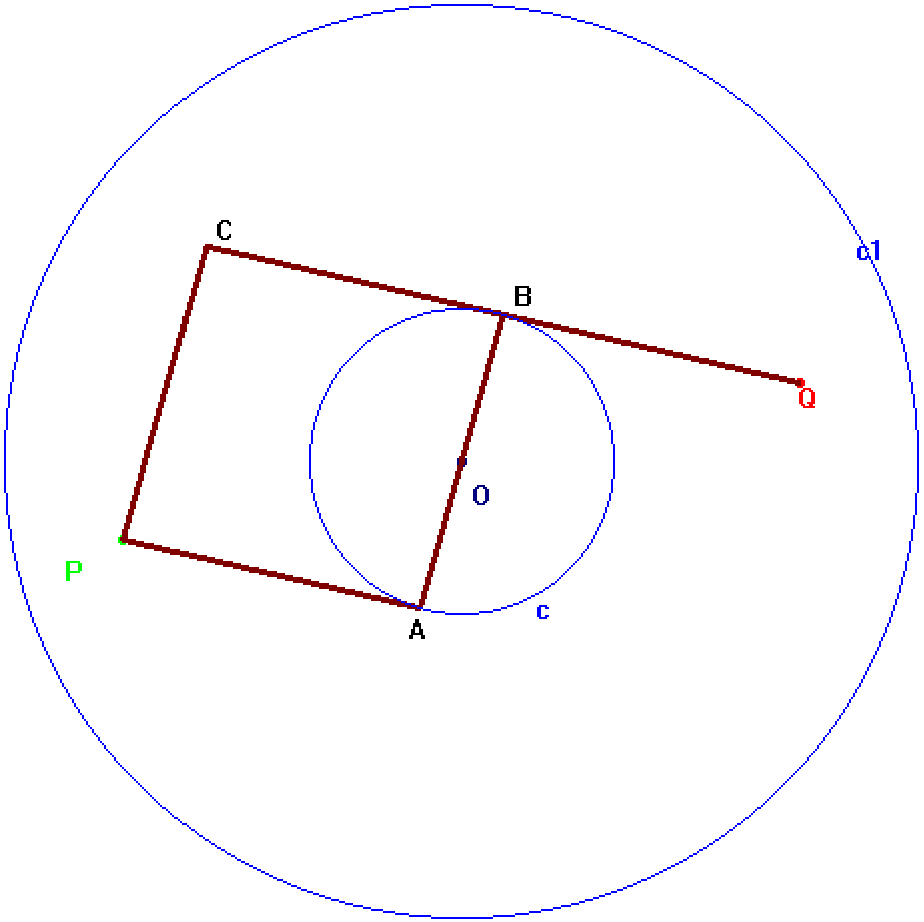



Equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

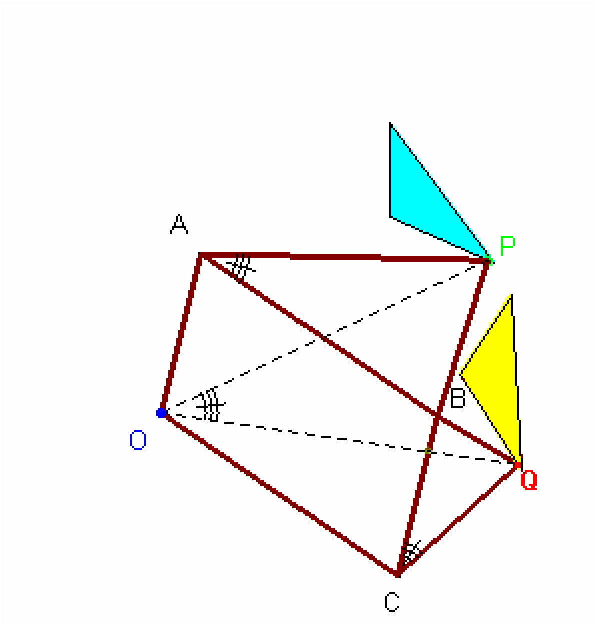
# Simmetria centrale




zone di piano messe in corrispondenza:

punti interni alla corona circolare individuata dalle circonferenze c e c1

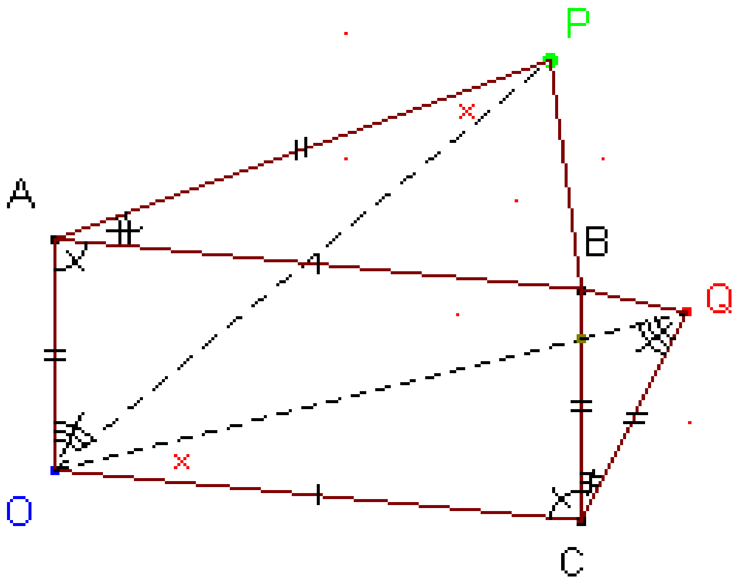
# Rotazione



# Rotazione

Costruzione:

AP=AB=OC OA=CB=CQ triangoli PAB e BCQ simili




Dimostrazione:

1) $P\hat{O}A = Q\hat{C}O$ quindi $PO = QO$

$A\hat{P}O = Q\hat{O}C$

$A\hat{O}P = O\hat{Q}C$

2) relazione fra angoli:

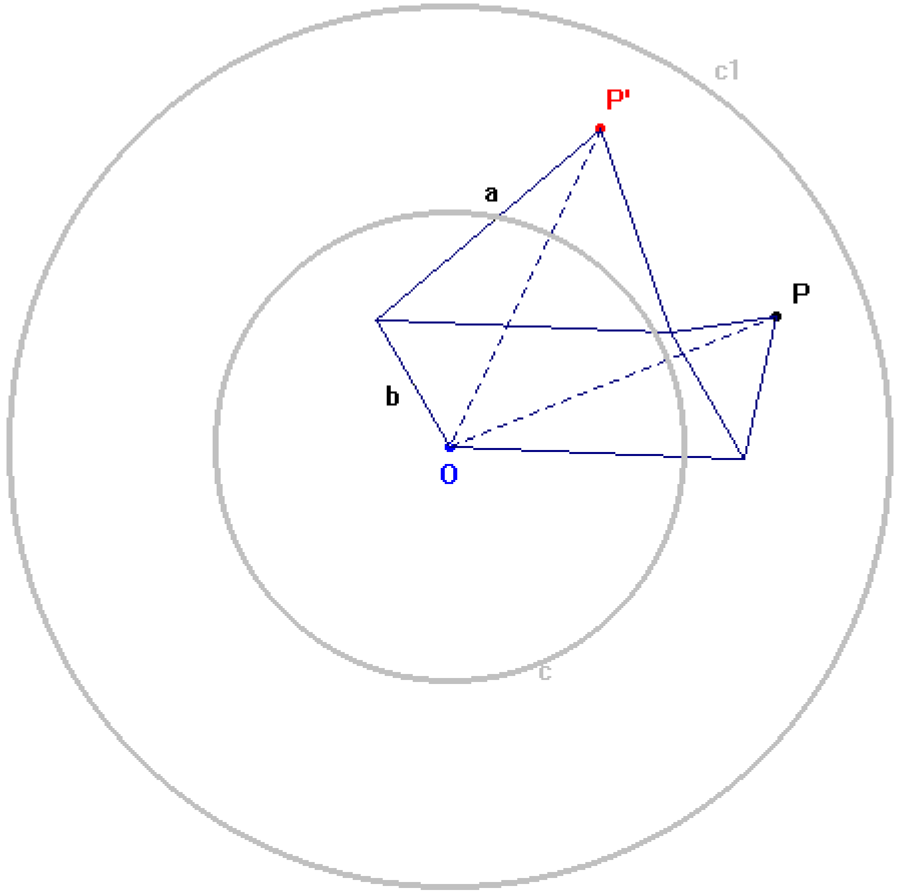
$$C\hat{O}Q + C\hat{Q}O + O\hat{C}Q = 180°$$

$$C\hat{O}Q + C\hat{Q}O + O\hat{C}B + B\hat{C}Q = 180$$

$$C\hat{O}Q + A\hat{O}P + B\hat{A}O + P\hat{O}Q = 180$$

$$P\hat{O}Q = B\hat{C}Q$$

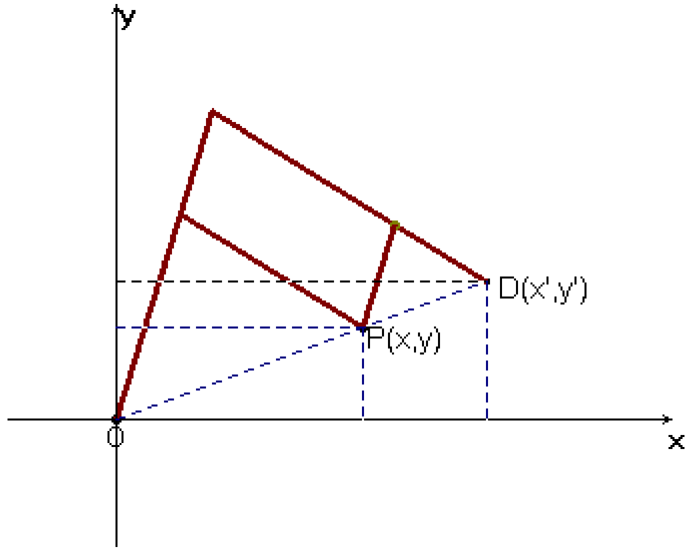
# Rotazione

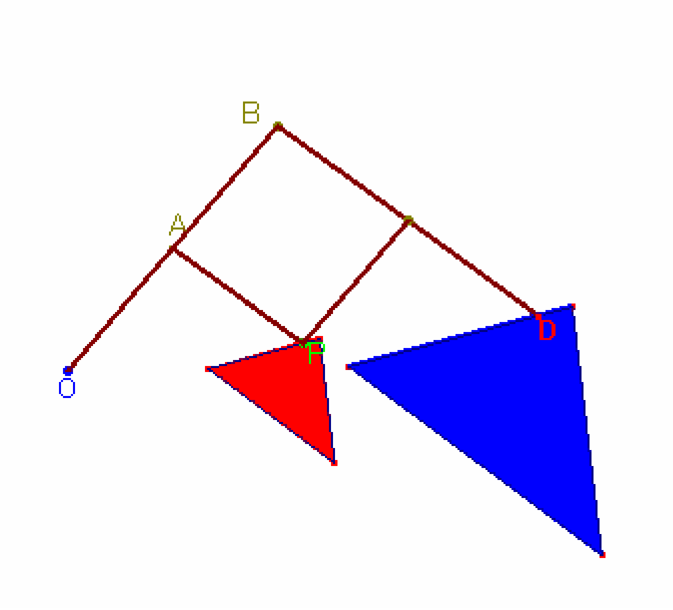



zone di piano messe in corrispondenza:

punti interni alla corona circolare individuata dalle circonferenze c e c1

# Omotetia



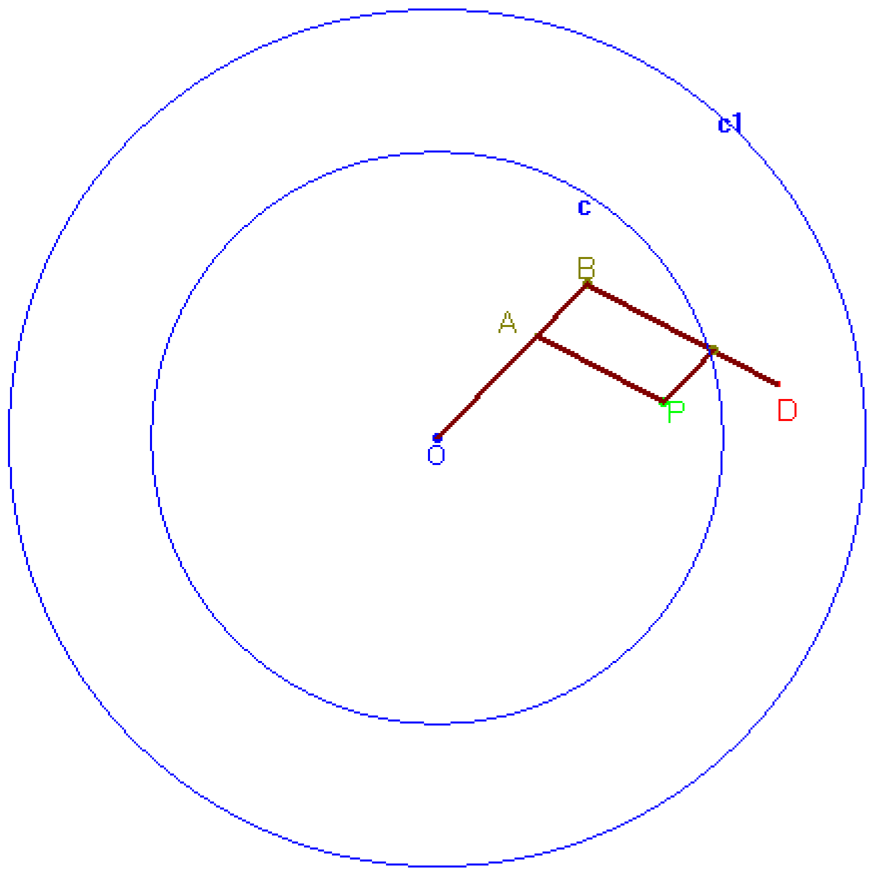




Equazioni:

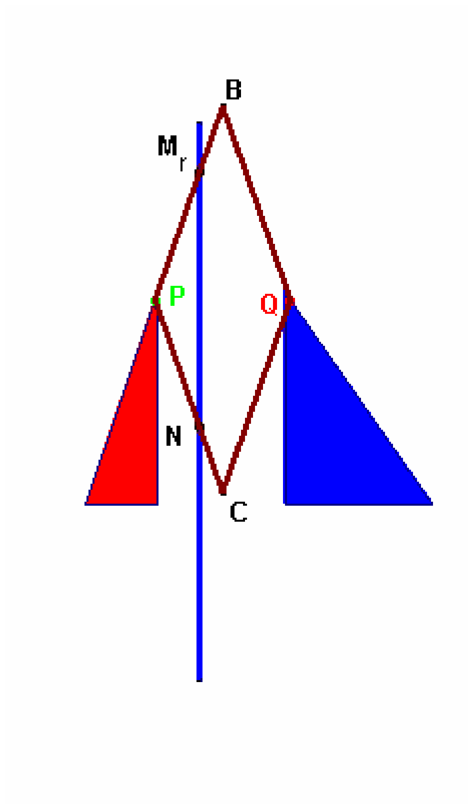
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

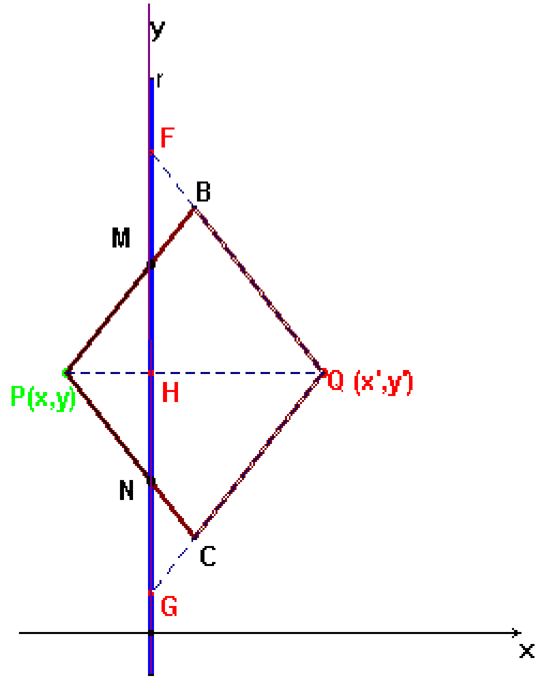
# Omotetia

zone di piano messe in corrispondenza:
punti interni al cerchio c  e punti interni al cerchio c1



# Stiramento




Equazioni:

$$\begin{cases} x' = -kx \\ y' = y \end{cases}$$

I triangoli FQG e MPN sono simili:

QH:PH=QF:PM

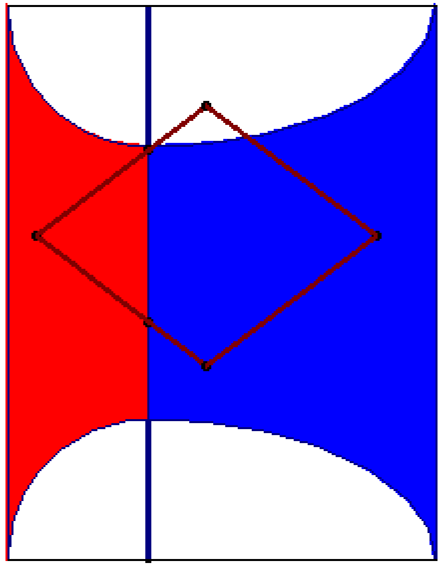
QH:PH=(QB+BM):PM

QB=$l$ PM=$d$

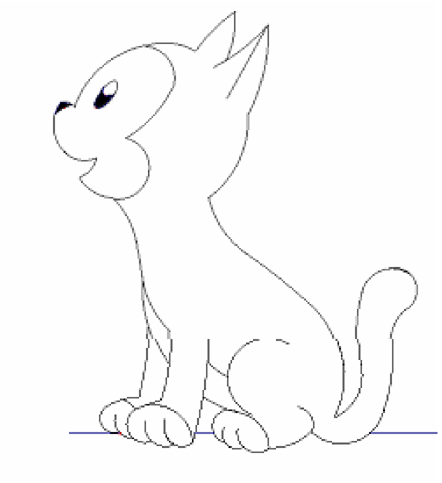
QH:PH=$(2l-d):d$

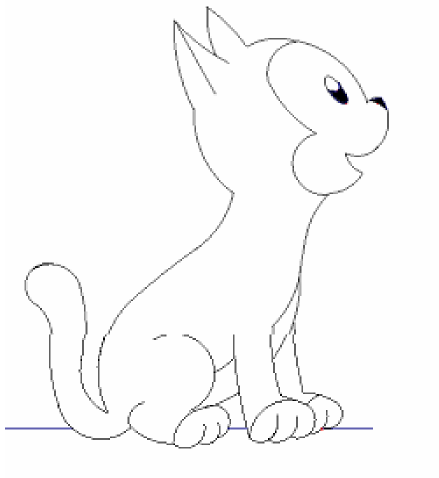
$K=(2l-d)/d$

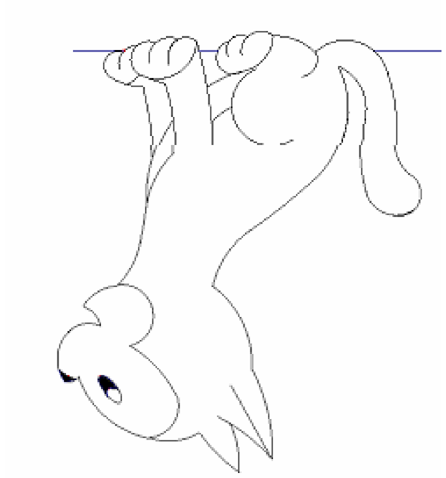
# Stiramento

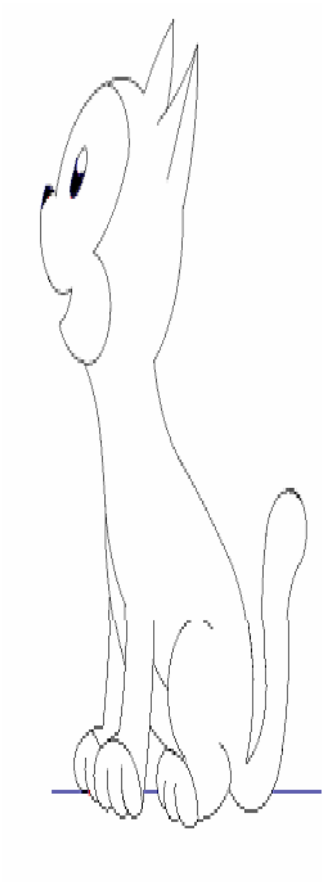


zone di piano messe in corrispondenza









fine