Laboratorio delle Macchine Matematiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Ateneo fondato nel 1175

Coniche e conicografi

Teoria tridimensionale

La teoria delle coniche si sviluppa nella seconda metà del IV secolo a.C. ad opera di Menecmo (Euclide) e successivamente di Apollonio.

Le coniche, ottenute come sezioni piane di un cono, sono studiate inizialmente nello spazio in quanto curve "solide".

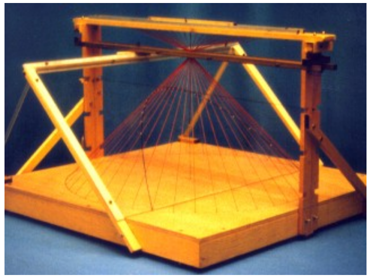
Teoria tridimensionale

Nella storia vi sono diverse riprese della teoria tridimensionale, documentate da:

- il compasso perfetto;
- la macchina di Descartes per le lenti iperboliche.

Menecmo

Nella teoria di Menecmo-Euclide (300 a.C. circa) i coni sono retti (ottenuti per rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto) e tagliati con piani perpendicolari a una generatrice.



Euclide, *ELEMENTI, Libro XI, definizioni 18, 19, 20.*

Quando un triangolo ruota intorno a un cateto fissato fino a ritornare nella posizione in cui era partito la figura così racchiusa è un CONO. Se il segmento che rimane fisso

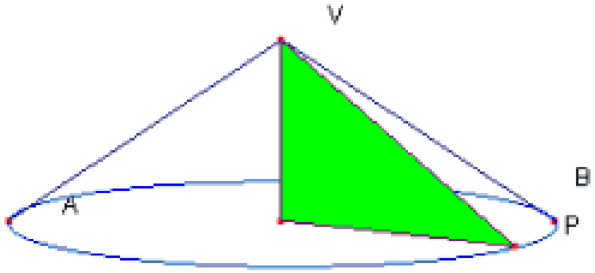
è uguale all'altro lato dell'angolo retto che è ruotato il cono sarà RETTANGOLO ;

se è minore all'altro lato dell'angolo retto che è ruotato il cono sarà OTTUSANGOLO ;

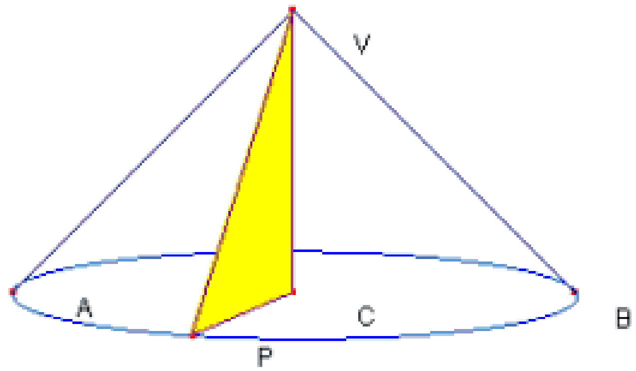
se è maggiore all'altro lato dell'angolo retto che è ruotato il cono sarà ACUTANGOLO.

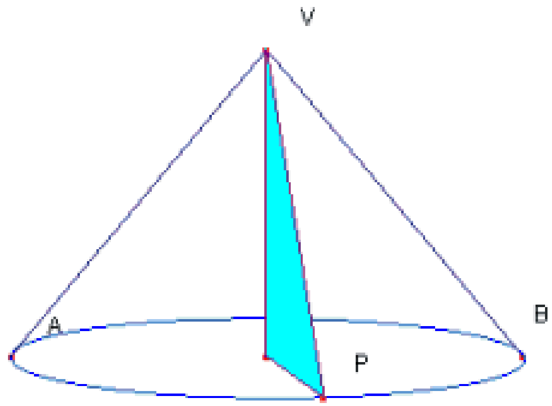
Menecmo

ottusangolo



rettangolo



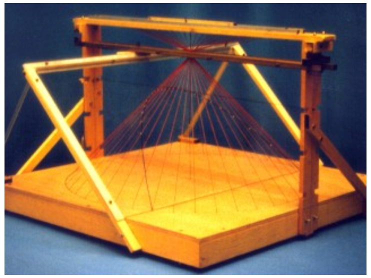


acutangolo

Menecmo

vincolo

piano secante è perpendicolare ad una generatrice (ipotenusa del triangolo che ruota)



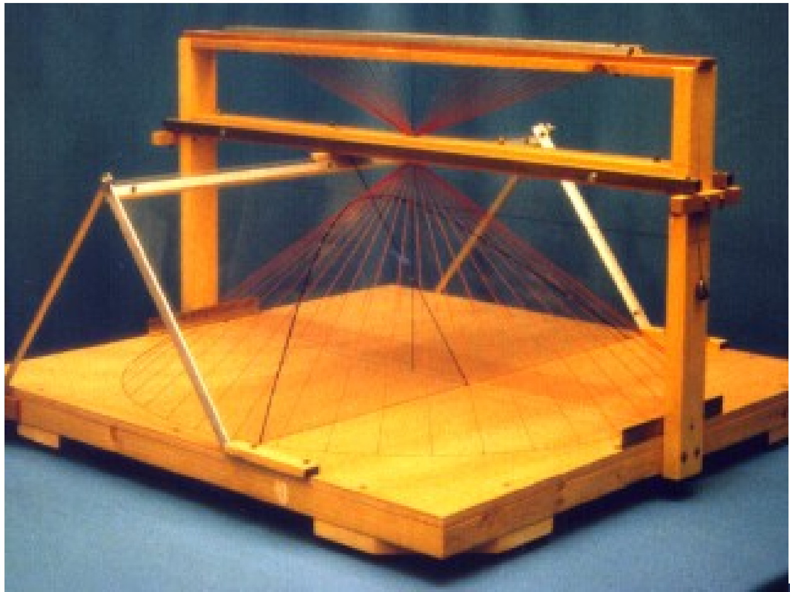
La proprietà caratteristica è indicata dai geometri greci con il termine "**sintomo**"

Laboratorio delle Macchine Matematiche

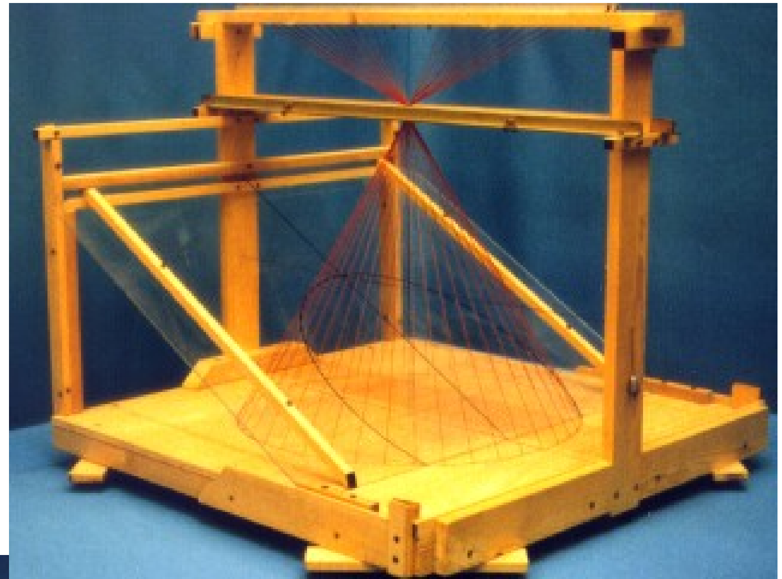
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Menecmo

amblitome

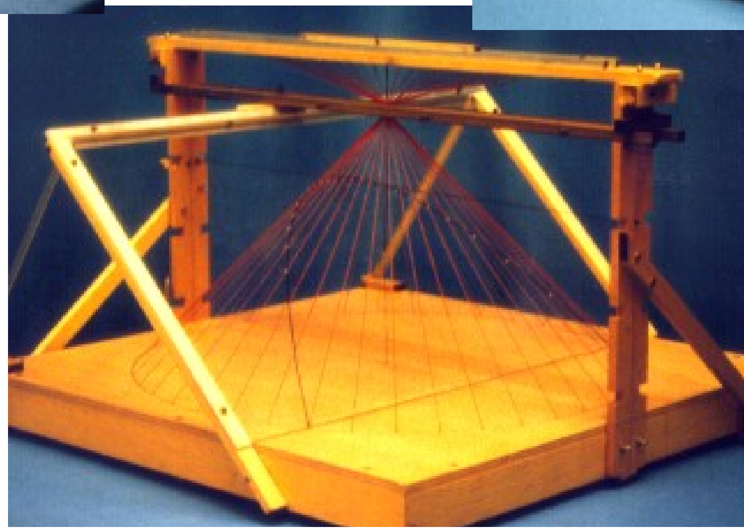


oxitome



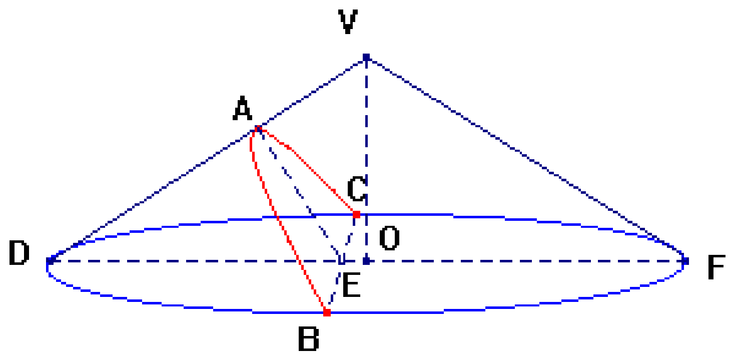
ortotome

$$BE \cdot BE = AE \cdot 2AV$$

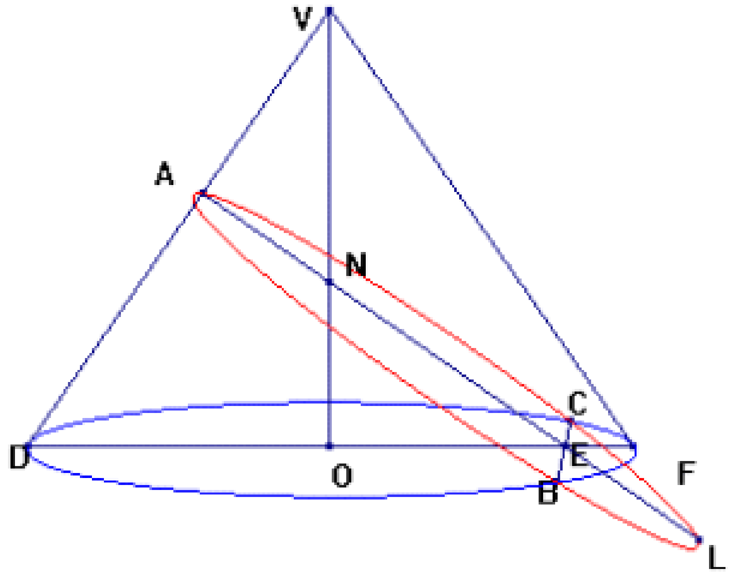


Menecmo

amblitome

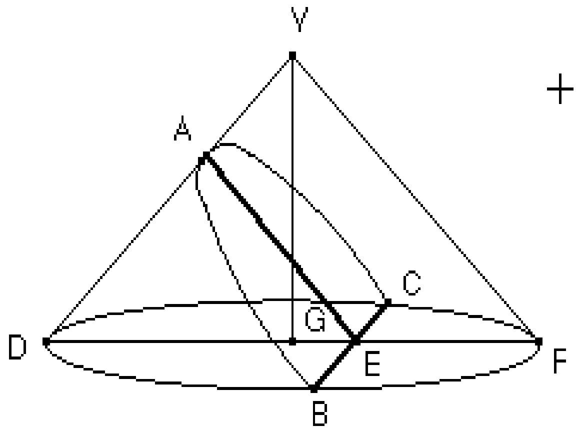


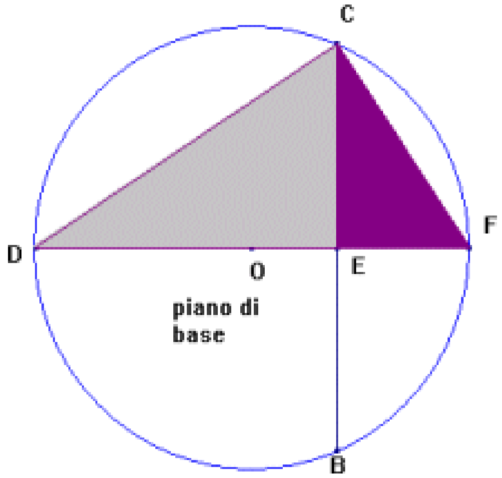
oxitome



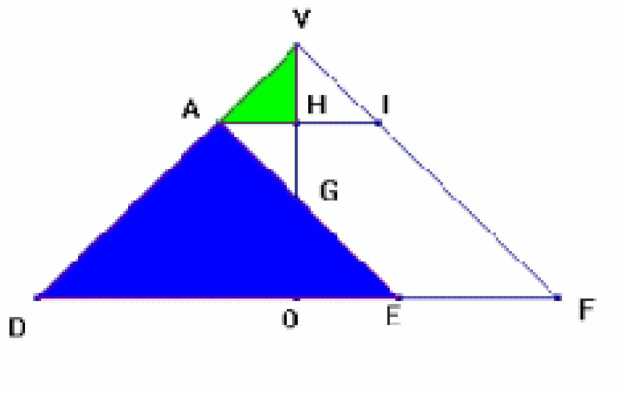
ortotome

$$BE \cdot BE = AE \cdot 2AV$$

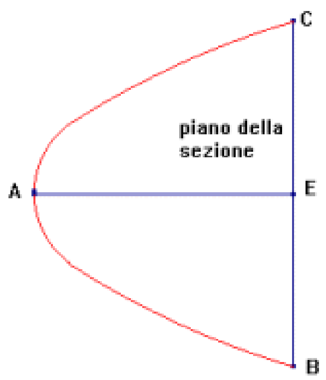




Nel piano di base
per il teorema di Euclide:
$CE^2 = DE \cdot EF$



Nel piano del triangolo per l'asse
i triangoli DAE e VHA sono simili,
quindi $DE:AE=AV:AH$
cioè $DE:AE=2AV:2AH$
ma $2AH=AI=EF$ e $AV=AG$ (parametro)
e quindi $DE:AE=2AV:EF$
cioè $DE \cdot EF = AE \cdot 2AV$.



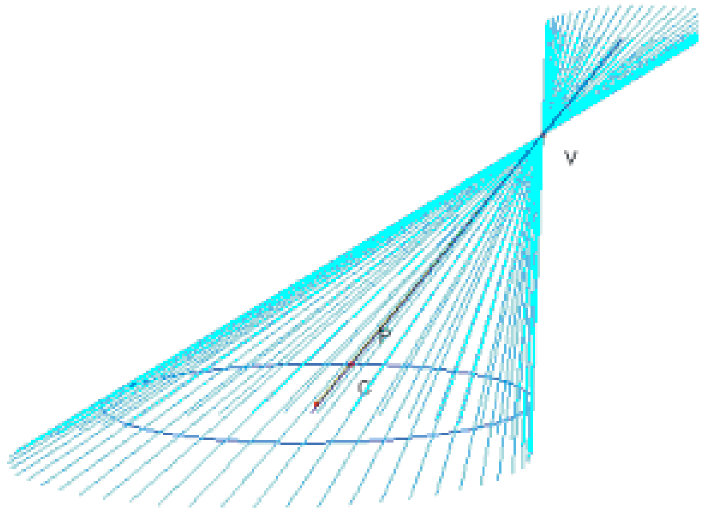
Segue che
$CE^2 = AE \cdot 2AV$.

Laboratorio delle Macchine Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Apollonio, *Coniche (225 a.C.)*

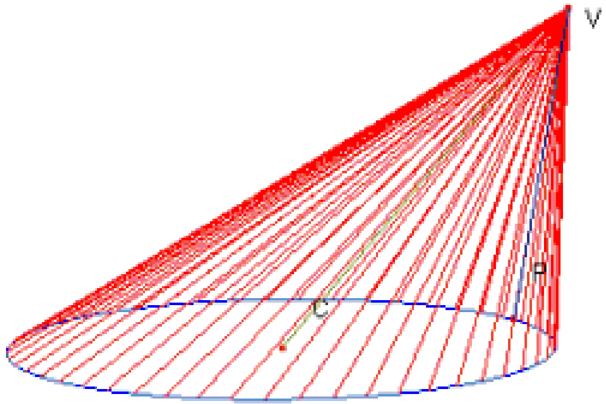
Se da un certo punto si traccia alla circonferenza di un cerchio non situato nello stesso piano del punto una retta (prolungata da una parte e dall'altra) e sempre stando fisso il punto la retta ruotante lungo

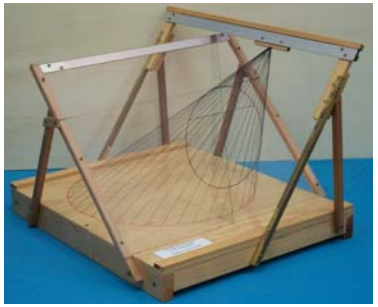
la circonferenza riprende la posizione da cui ha iniziato a muoversi, io chiamo SUPERFICIE CONICA quella che descritta dalla retta è composta da due superfici opposte nel vertice dove ciascuna cresce verso l'infinito.



Apollonio, *Coniche*

cono



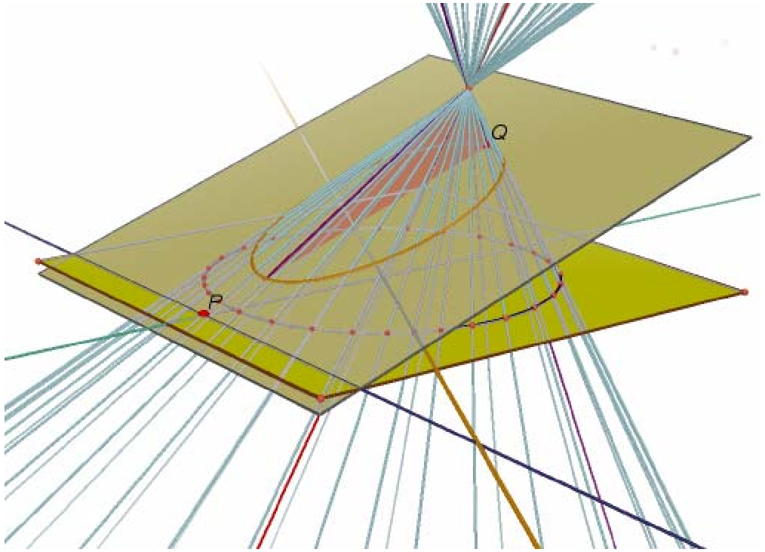


Apollonio, *Coniche (225 a.C.)*

vincolo

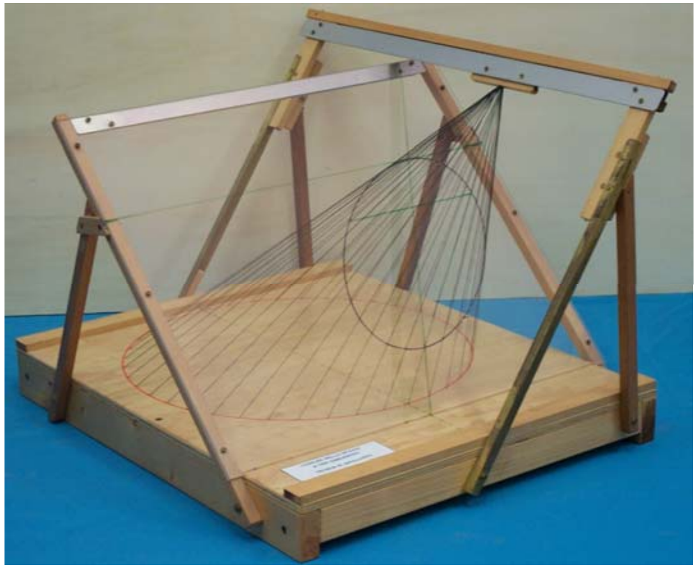
piano secante e piano di base del cono si intersecano lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo per l'asse

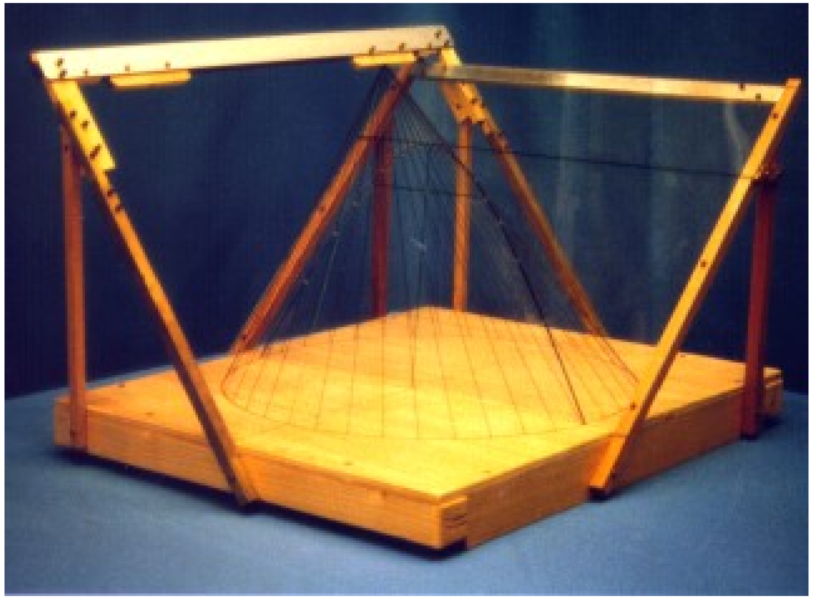
L'inclinazione del piano secante determina il tipo di sezione.



Apollonio

ellisse quando il piano secante incontra entrambe le generatrici contenute nel piano assiale (lati del triangolo assiale)

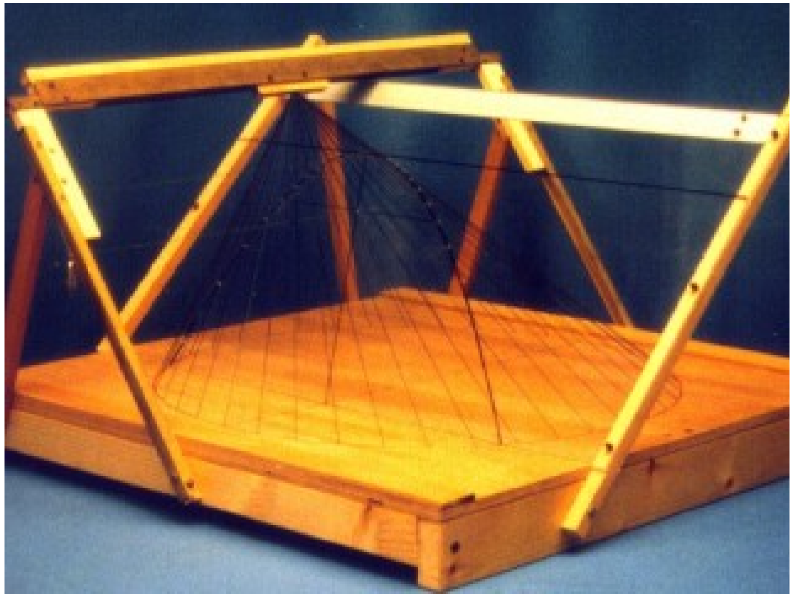




Iperbole quando il piano secante interseca un lato del triangolo per l'asse e il prolungamento dell'altro, si ottiene l'iperbole.

Apollonio

parabola quando il piano secante è parallelo a uno dei lati del triangolo per l’asse non coincidenti con la sua base.



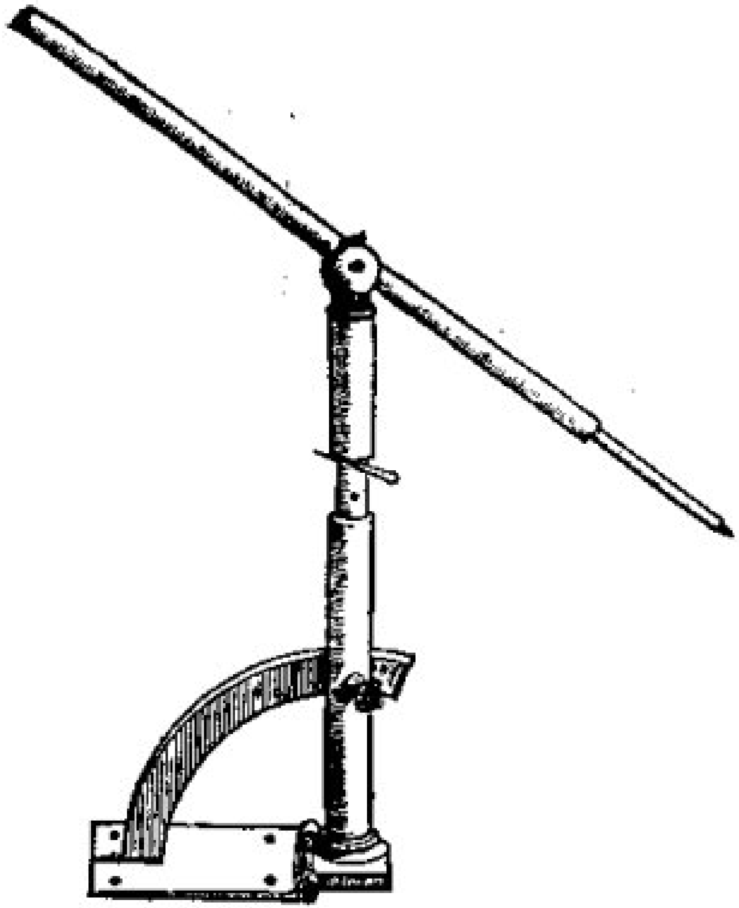
Menecmo ~ Apollonio

Laboratorio delle Macchine Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Ateneo fondato nel 1175

In entrambi i casi assistiamo ad una **genesi spaziale** delle tre curve piane, nel primo la generazione delle tre diverse coniche nasce da uno ***stesso modo di sezionare tre coni distinti***, mentre in Apollonio ognuna delle curve si ottiene a partire da ***un unico cono.***

Il compasso perfetto

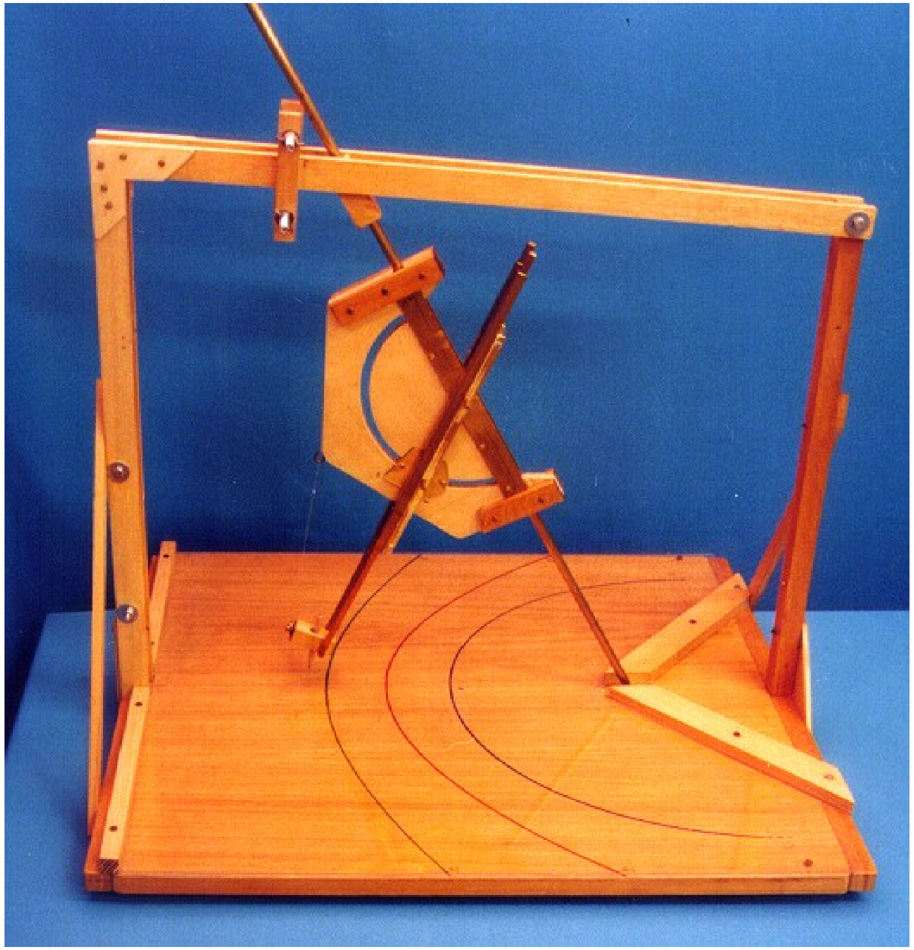
I **compassi "perfetti"** (detti così perché possono tracciare sia circonferenze che archi di sezioni coniche qualsiasi) hanno una probabile origine araba (X-XII secolo). Nel periodo rinascimentale ne furono costruiti diversi esempi.



F.Barozzi, Admirandum illud geometricum problema, Venetiis, 1586

Il compasso perfetto

Il modello qui riprodotto è simile allo strumento descritto da **Cavalieri** nello “Specchio Ustorio ”:



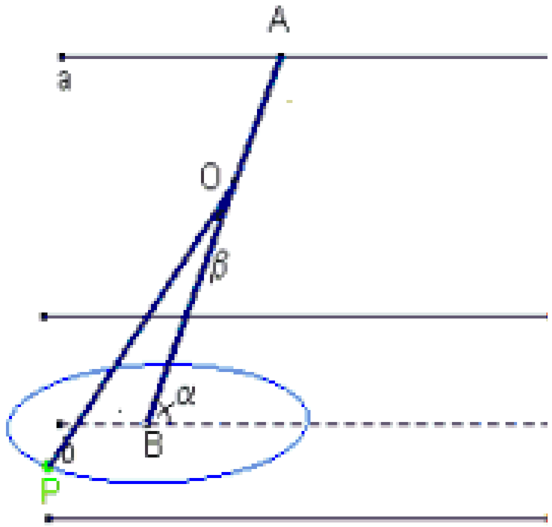
Il compasso perfetto

Il modello qui riprodotto è simile allo strumento descritto da **Cavalieri** nello "Specchio Ustorio":

Se $\alpha=\beta$ si ha una parabola,

se $\alpha>\beta$ si ha un'ellisse,

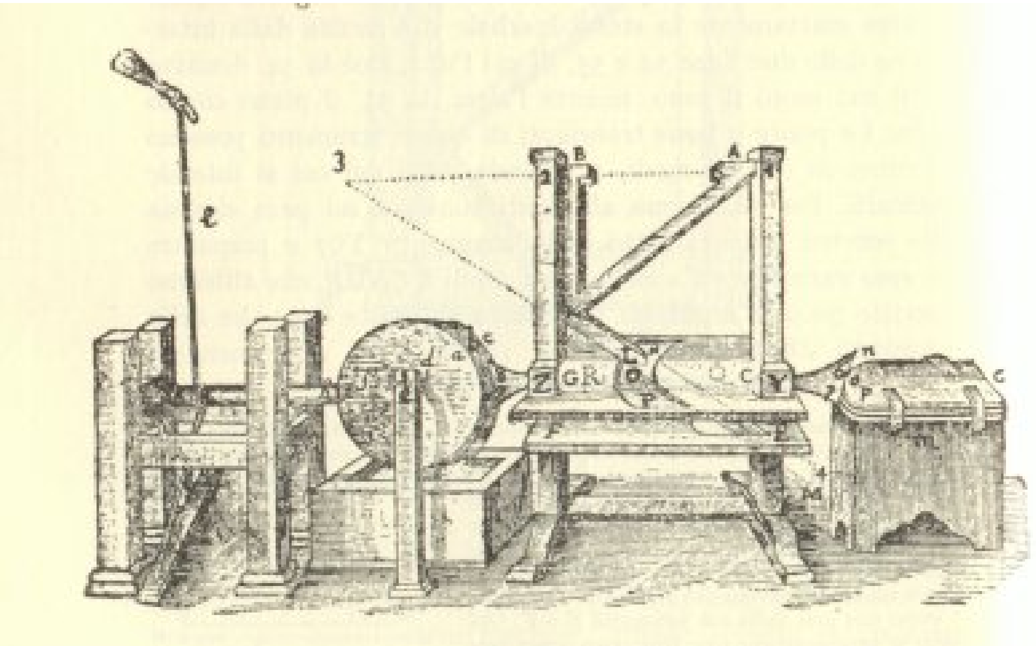
Se $\alpha<\beta$ si ha un'iperbole

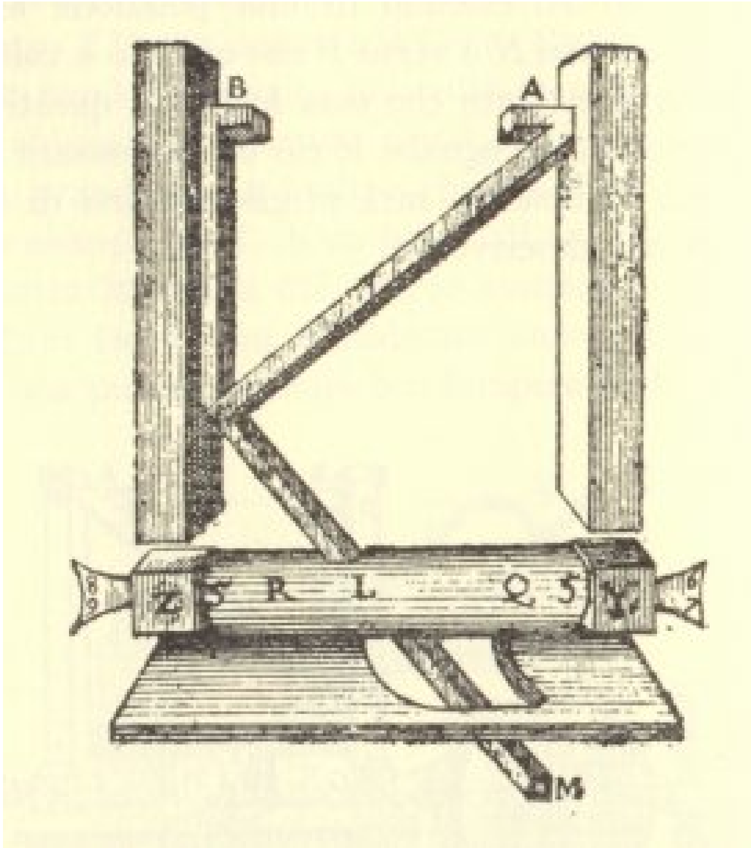


La macchina per lenti iperboliche

Nel discorso X della "Diottrica" (e in un carteggio del 1629 con Ferrier, celebre tecnico parigino costruttore di strumenti matematici) Descartes descrive invece una vera e propria **macchina utensile**, pensata e progettata per un uso pratico: la costruzione di lenti iperboliche.

La macchina per lenti iperboliche



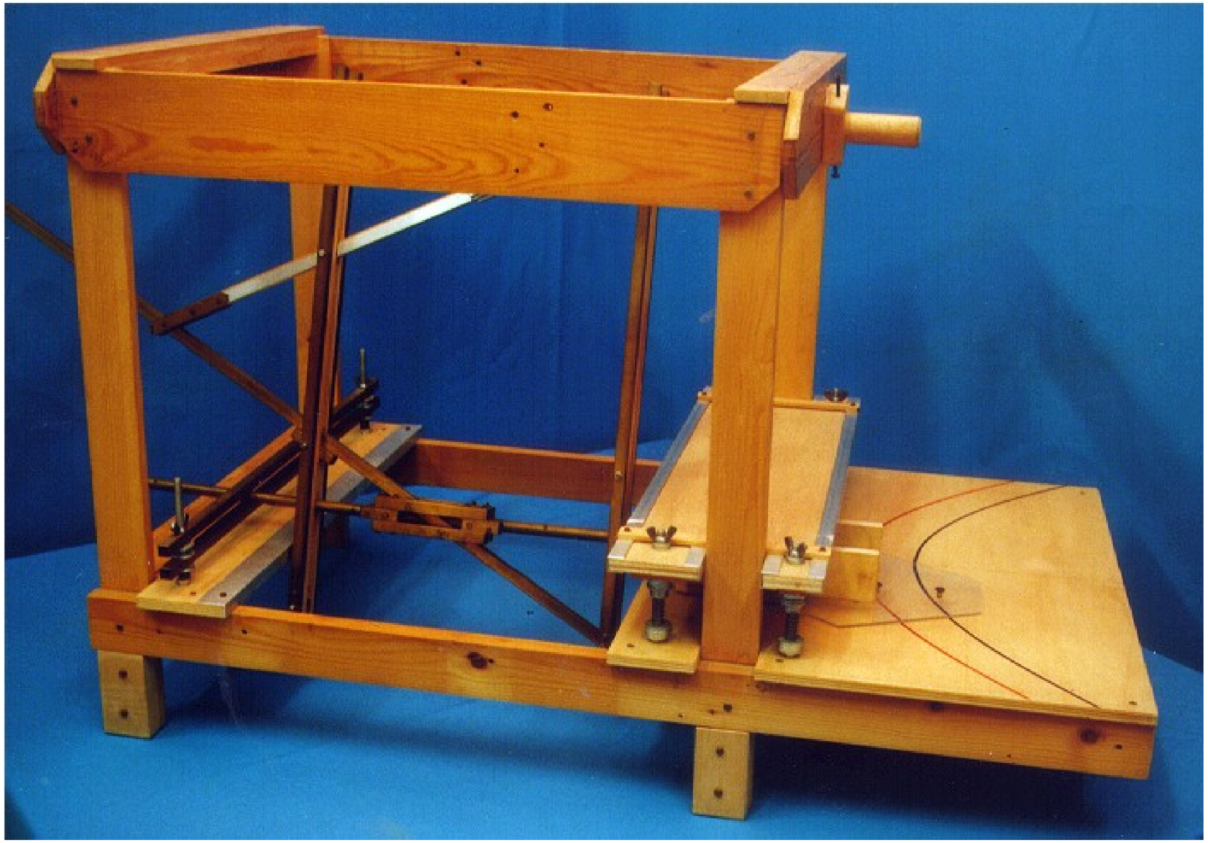


R. Descartes, *La dioptrique*, 1636

La macchina per lenti iperboliche

Laboratorio delle Macchine Matematiche

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia



Teoria bidimensionale

L’uso di strumenti meccanici per tracciare coniche (e altre curve) è diffuso fino dall’antichità, ma ha una straordinaria fioritura dopo la pubblicazione della *Géométrie* di Descartes, in cui agli strumenti meccanici e al movimento viene dato un ruolo fondamentale nel discorso teorico e nella soluzione dei problemi.

Descartes

Descartes utilizza nello studio delle curve sia le equazioni sia gli strumenti tracciatori.

Problemi fondamentali:

- quali sono gli strumenti ammissibili nella generazione delle curve ?
- quali sono le linee che possono essere accolte in geometria?

Descartes

meccanica

- *Secondo Descartes si possono accettare in geometria solo le curve descritte da un movimento continuo, o da più movimenti che si susseguano l'un l'altro in modo che i seguenti siano interamente determinati dai precedenti*
- *[….] tutti i punti delle curve accettabili, che possiamo chiamare Geometriche, stanno necessariamente con tutti i punti di una retta in una certa relazione che può essere espressa per mezzo di una singola equazione (algebrica)*

algebrica

Il riferimento allo strumento favorisce lo sviluppo di molti trattati di geometria 'organica' (cioè geometria degli strumenti), ad opera di Cavalieri, Van Schooten, L'Hospital, Newton, Mac Laurin ecc. che progettano e studiano numerosi tracciatori per vari tipi di curve algebriche.

Proprietà geometriche della curva $\Rightarrow$ strumento

Teoria bidimensionale

La ricerca sulle coniche nel piano (durata diversi secoli) ha messo in evidenza numerose proprietà caratteristiche che stanno alla base di molti meccanismi inventati per tracciarle (conicografi).