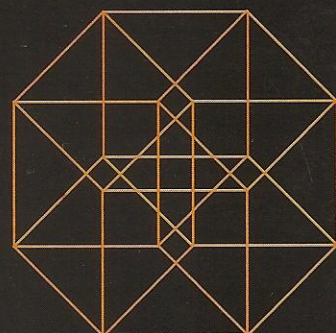


Rivista di matematica e didattica

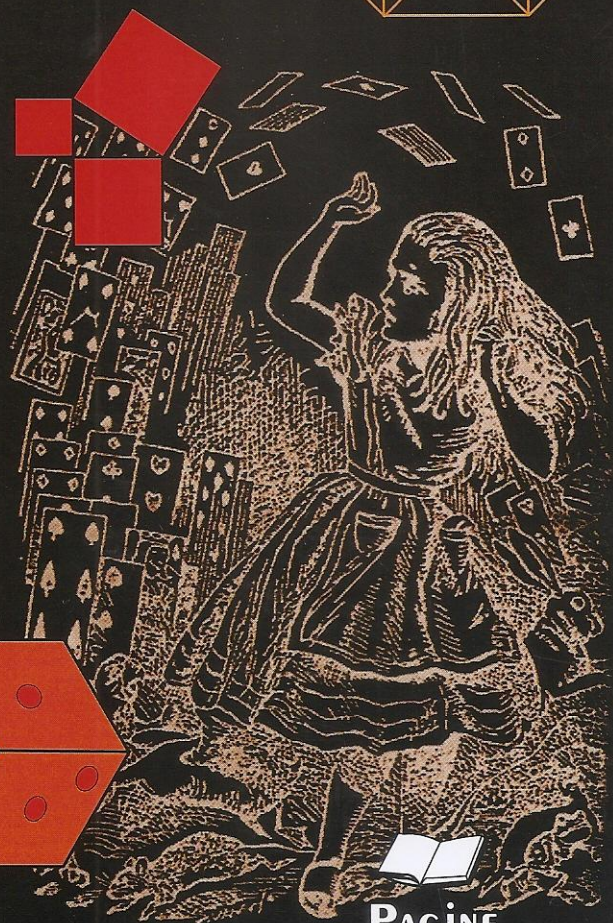
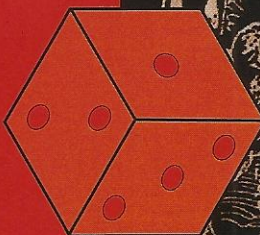
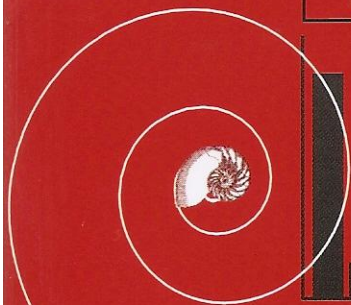
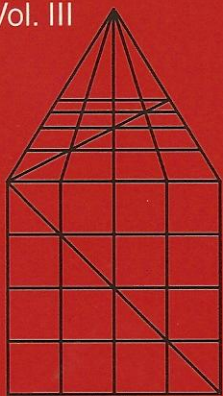
# PROGETTO ALICE E IL



n° 8

Vol. III

Anno 2002 - II



PAGINE



## Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati

Marcello Pergola, Carla Zanoli, Annalisa Martinez, Marco Turrini

**Riassunto.** Alcune figure geometriche elementari, quando vengono usate come “organi di macchina” per costruire biellismi o sistemi articolati (realizzati come modelli fisici o simulati al computer) si prestano ad illustrare efficacemente le più semplici trasformazioni puntuali piane e a generare un gran numero di curve. Le attività didattiche che è possibile organizzare servendosi di questi strumenti sono divertenti, ricche di agganci con la storia della matematica, stabiliscono un fruttuoso rapporto tra esperienze empiriche (su due livelli di realtà: l’uno reale, l’altro virtuale) e costruzione di dimostrazioni.

**Abstract.** The use of some elementary geometric shapes as parts of machines to construct planar mechanical linkages (physical models or computer simulations), is particularly effective to explain easy planar transformations clearly and generate many curves. Using these instruments, teachers can organise amusing educational activities connected with mathematics history. Moreover these teaching activities produce a profitable connection between empirical experiences and theoretical proofs.

M. Pergola  
pernon@iol.it

C. Zanoli  
czanoli@tiscalinet.it

A. Martinez

M. Turrini

Laboratorio di Matematica – Museo Universitario – Viale Jacopo Berengario, 16 - Modena

## 1. Premessa: sistemi articolati e biellismi

Sia data una figura piana costituita da segmenti **rigidi** (di varia lunghezza) collegati fra loro (un esempio in fig.1); tali segmenti possono ruotare nel piano (ognuno rispetto agli altri) attorno ai punti di giunzione (vertici o nodi, che quindi diventano **cerniere**); si ottiene così, purché la figura non risulti indeformabile (lo sarebbe ad es. una rete di triangoli), un **sistema articolato**. (Qualcuna delle cerniere può essere fissata a **perni** immobili nel piano). Se invece una o più cerniere sono costrette a scorrere entro scanalature opportunamente predisposte, si ha un **biellismo**.

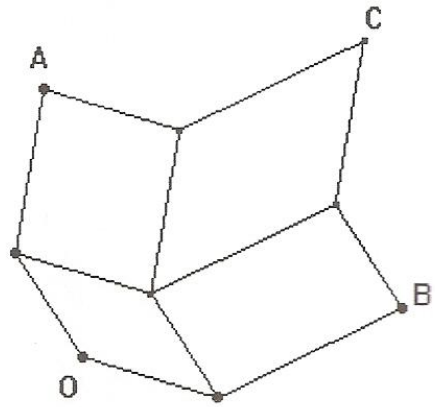


Fig. 1

Possiamo rappresentarci il movimento dei sistemi articolati o dei biellismi con l'immaginazione (osservarlo cioè con gli "occhi della mente"), e siamo allora in una situazione di libertà completa; oppure studiare questi meccanismi mediante simulazioni al computer (in questo caso dobbiamo confrontarci con la logica del software utilizzato, cioè con la volontà dei suoi autori); infine (se non sono troppo complicati) è possibile realizzarli concretamente con aste di legno e metallo (si incontrano allora difficoltà materiali "oggettive": alle quali tuttavia si può sempre rispondere con soluzioni diverse).

I biellismi e sistemi articolati più antichi risalgono all'epoca alessandrina e alla cultura araba; nel '600, con l'opera di Cartesio, acquistano importanza teorica centrale, durevole e vasta; nell'800 infine, quando si forma e diventa fondamentale la teoria delle trasformazioni geometriche, conoscono nuova fortuna. La loro presenza negli studi e nei trattati di geometria è stata sempre legata sia a cause interne (utilità nel risolvere problemi particolari: per es., nell'età classica, la trisezione dell'angolo; nel '600, la "costruzione" delle equazioni <sup>(1)</sup>) sia a cause esterne (influenza dello sviluppo di nuovi sistemi tecnici – per es. la ingegneria meccanica – sul pensiero matematico).

Nell'analisi del movimento di configurazioni geometriche variabili (così come viene impostata dai grandi geometri del '600, fondatori della "Geometria Organica") non hanno alcuna importanza quelle che noi oggi chiamiamo gra-

dezze fisiche (velocità, forze, ecc.): la domanda fondamentale è invece: ci sono proprietà o relazioni che rimangono invariate? E' noto ad es. che i metodi elaborati nelle opere di Cartesio, Newton, Mac Laurin (e numerosi altri) per determinare le equazioni di curve generate da sistemi meccanici, si fondavano proprio sulla individuazione, all'interno della figura che si deformava – “preparata” eventualmente aggiungendovi qualche altro elemento – di parti che rimasero uguali in forma (cioè simili). Ciò consentiva di ricavare proporzioni, per mezzo delle quali si riusciva a vincolare fra loro le “variabili” con leggi (equazioni) sulla cui validità il movimento non poteva incidere in alcun modo; erano, per così dire, “incorporate” nel meccanismo e per questo con esse si riusciva a caratterizzare ciò che il meccanismo produceva: nel caso specifico, una curva.

E' uno degli stili di pensiero, uno dei numerosi percorsi intellettuali che hanno rinnovato profondamente (a partire dall'epoca rinascimentale) la tradizione euclidea, immettendovi nuova linfa: ad esso ci richiamiamo quando, rappresentandoci intuitivamente qualche figura geometrica elementare come sistema articolato in moto continuo, “vediamo” le sue proprietà come gli invarianti di questo moto.

Ma ben più importante è il cambiamento di sguardo a cui si è condotti nella progettazione di un meccanismo complesso. Le figure geometriche elementari sono allora osservate non come oggetti singoli, bensì come “organi di macchina” da collegare e assemblare.

In quanto tali, il loro ruolo è definito non solo dagli invarianti caratteristici a cui abbiamo appena accennato (sempre gli stessi in qualsiasi epoca), ma soprattutto dallo scopo e dal contesto per cui e in cui vengono utilizzate, quindi da variabili storiche. E così la continua ristrutturazione e risistemazione del quadro concettuale dove sono chiamate ad operare spiega come abbia potuto svilupparsi durante l'evoluzione del pensiero matematico, per le figure costrette ad agire come parti “interne” nei meccanismi (anche quando il loro numero è molto ristretto: parallelogrammi, deltoidi, antiparallelogrammi) un campo di applicazioni estremamente e sorprendentemente vasto. Ora possiamo percorrerlo e controllarlo con facilità, spostandoci disinvoltamente da un secolo all'altro, ma la sua formazione nel tempo è stata lenta e irta di ostacoli.

In questo breve scritto (e in un altro che seguirà) vogliamo presentare agli insegnanti alcuni biellismi e sistemi articolati, perché abbiamo sperimentato che essi possono avere una valenza didattica forte. E infatti:

- La semplicità degli strumenti di cui parleremo non pone alcun ostacolo alla costruzione di loro modelli fisici e delle corrispondenti simulazioni, che possono essere “animate”: (un software adatto è per es. Cabri II, utilizzato per eseguire i disegni che illustrano queste pagine). Alla dimensione storica si aggiunge così, nella attività didattica, quella empirica, in cui reale e virtuale, distinti e complementari, si intrecciano in un gioco complesso di rinvii.
- L'esperienza può condurre a convinzioni soggettive anche molto salde: ma dalla sua discussione emerge sempre che in matematica sono necessarie dimostrazioni formali, comunicabili a tutti e, per tutti, valide e costrittive.
- Ogni meccanismo può suggerirne altri (per analogia, composizione, generalizzazione, particolarizzazione): sorgono continuamente nuovi problemi, stimolanti per la curiosità e le capacità argomentative o di calcolo degli studenti.
- Il docente ha grande libertà di decidere con quali tempi e modi inserire nel suo piano di lavoro (e nella situazione in cui si trova) la manipolazione, osservazione, costruzione e simulazione delle macchine: se farne uso per introdurre concetti nuovi, oppure per chiarire (o completare) conoscenze teoriche già acquisite. Nella scuola media superiore, i terreni di esercizio privilegiati sono tre: risoluzione di problemi, teoria delle curve algebriche piane, trasformazioni geometriche (dalle isometrie alle omologie).

## 2. Trasformazioni e curvigrafi: alcuni esempi

Osserviamo il biellismo rappresentato in fig. 2. QRPS è un rombo articolato; le cerniere S ed R (vertici opposti del rombo) scivolano entro una scanalatura rettilinea; i punti P e Q hanno due gradi di libertà. Poiché la posizione dell'uno è determinata da quella dell'altro (e viceversa) viene stabilita una corrispondenza (biunivoca) tra le regioni (limitate) del piano che li contengono. Di quale corrispondenza si tratta? In ogni configurazione possibile, i quattro triangoli SPH, PHR, QHR, QHS sono sempre uguali fra loro: dunque  $PH = QH$ , e PQ è perpendicolare alla retta SR (scanalatura). Siamo dunque

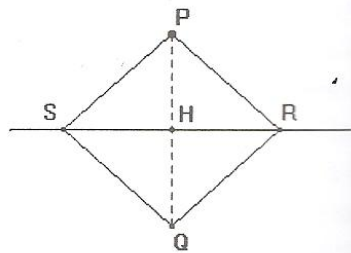


Fig. 2

in presenza di una simmetria assiale ortogonale.

Non è necessario che QRPS sia un rombo: si può usare un deltoide articolato, come mostra la fig. 3. Per ricavare empiricamente il carattere involutorio della trasformazione occorre che P e Q possano passare nei semipiani opposti a quelli in cui si trovano, attraversando la scanalatura RS. Questo passaggio ("scambio di posto") è facile da ottenere con una simulazione al computer: più difficile invece realizzarlo in un modello fisico.

Collocando nel piano dello strumento un riferimento cartesiano ortogonale con asse x passante per S ed R, si ricava immediatamente, indicando con (x;y) le coordinate di P e con (x';y') quelle di Q:  $x' = x$ ,  $y' = -y$ . Queste equazioni, se in esse non è introdotta alcuna limitazione per i valori di x e y, assumono valore globale (trasformazione dell'intero piano in sé): lo strumento invece agisce localmente. Nasce dunque il problema (lasciamo la risposta al lettore): come si caratterizzano (geometricamente e algebricamente) le regioni limitate che la "macchina" mette in corrispondenza? (tenere conto del fatto che la scanalatura RS ha lunghezza finita).

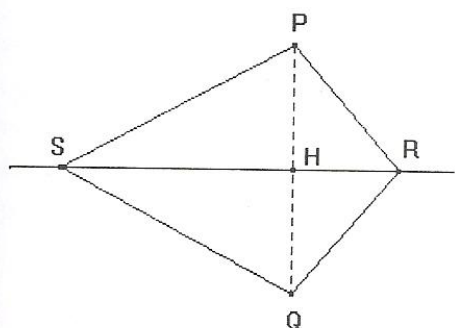


Fig. 3

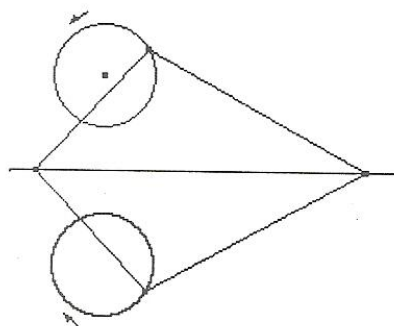


Fig. 3 bis

Negli strumenti di fig. 2 e fig. 3 esistono due modi diversi per consentire ai punti corrispondenti P e Q un solo grado di libertà:

- a) vincolare P (puntatore, calcatoio) a una curva: in questo caso Q (tracciatore, stilo) descrive la curva corrispondente;
- b) fissare una delle cerniere scorrevoli (per es. S) a un perno immobile.

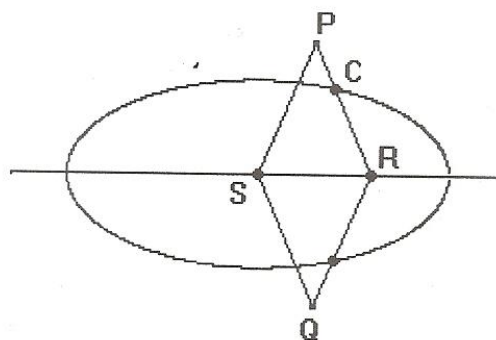


Fig. 4

Nel primo caso (per ogni curva chiusa) si può osservare l'inversione del verso di percorrenza sul contorno (fig. 3 bis); nel secondo caso (fig. 4), quando il meccanismo è costruito con un rombo, mentre P e Q descrivono due circonferenze, ogni punto C di PR ed RQ (anzi, delle rette a cui appartengono questi lati) descrive un arco di ellisse ("compasso" di Van Schooten<sup>(2)</sup>); invece, se è stato usato un deltoide, le curve descritte dai punti C sono di grado più elevato. Si possono vedere in fig. 5, ma non è difficile ricavarne le equazioni. Ecco una traccia per i calcoli (il riferimento è indicato nella figura).

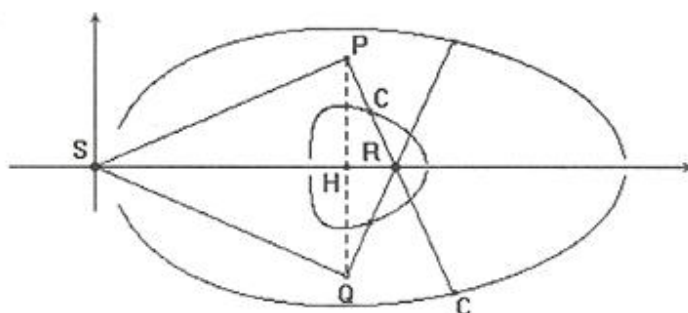


Fig. 5

Si ponga:  $SP = a$ ;  $PR = b$ ;  $PC = k$ ; angolo  $PSR = \alpha$ ; angolo  $PRS = \beta$ ,  $P(x;y)$ ,  $C'(x';y')$ .

È:  $a \operatorname{sen} \alpha = b \operatorname{sen} \beta = PH$ , quindi  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{sen} \beta$ . Risultata:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 \beta} + k \cos \beta \\ y = (b - k) \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$

Eliminando il parametro  $\beta$  si ricava:

$$\left( (b - k)^2 (x^2 - a^2 + k^2) - y^2 (k^2 - b^2) \right)^2 = 4k^2 x^2 \left( (b - k)^2 - y^2 \right) (b - k)^2 . .$$

È spontaneo chiedersi: quando il deltoide viene usato come in fig. 6 (S e R rappresentano ancora i cursori che scorrono nella scanalatura rettilinea) di che tipo è la corrispondenza fra P e Q? Si osservi che in ognuna delle configurazioni possibili è  $SH = HR$ ; quindi, ponendo  $a = SP$ ,  $b = SQ$ ,  $P(x;y)$ ,  $Q(x';y')$  (il riferimento è indicato in figura) si ricavano le equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -\sqrt{b^2 - a^2 + y^2} \end{cases}$$

(la trasformazione non è lineare). In fig. 7 si può vedere la trasformata di una circonferenza.

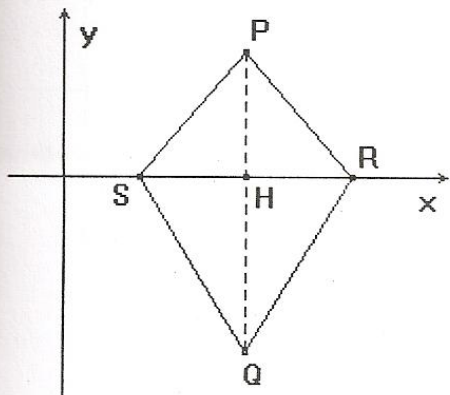


Fig. 6

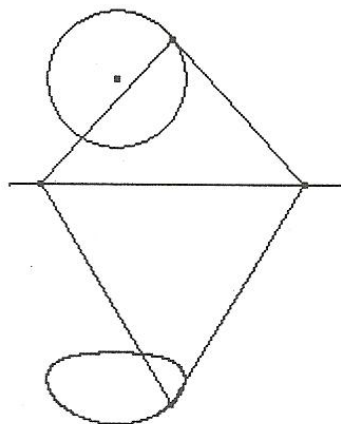


Fig. 7

Un biellismo analogo a quello di fig. 2 si può costruire usando, anziché un rombo, un generico parallelogramma di lati  $a$  e  $b$ . La fig. 8 ci mostra come appare, in questo caso, la trasformata di una retta  $AB$  (anzi, in realtà, di un segmento  $AB$  i cui estremi hanno, dalla scanalatura  $RS$ , distanza uguale al lato minore  $a$ ). Poiché il parallelogramma (a parità di lunghezza dei lati) può assumere le due configurazioni indicate in figura (la prima con segno continuo, la seconda con tratteggio) ad ogni punto del segmento  $AB$  corrispondono due punti della curva.

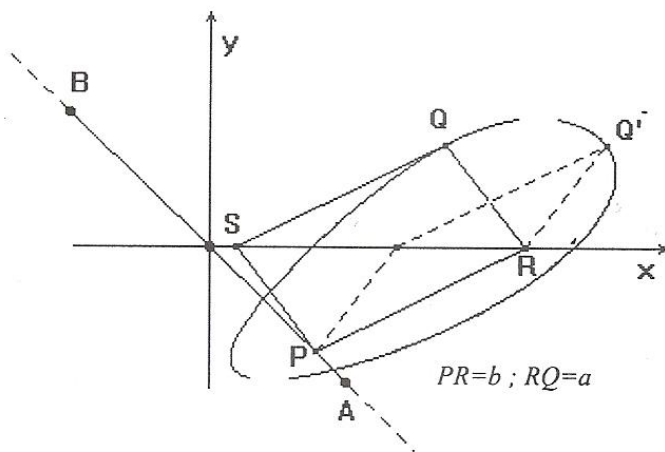


Fig. 8

Diamo anche qui una traccia per i calcoli (il riferimento cartesiano è quello di fig.8):  $y = mx$  (equazione della retta);  $(x'; y')$  coordinate di  $Q$ ;  $(x; y)$  co-



ordinate di P).

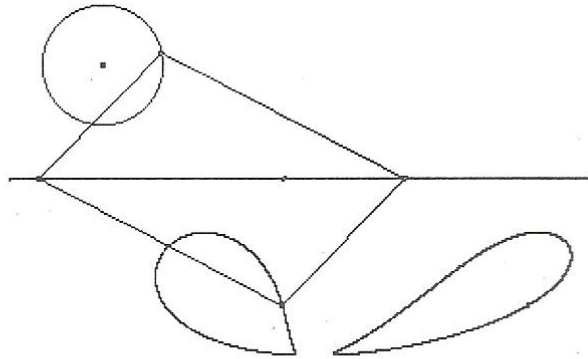


Fig. 9

$$\begin{cases} x' = x + b \cos \beta - a \cos \alpha \\ y' = -y \end{cases}$$

Ma, essendo  $a \sin \alpha = b \sin \beta = y$ , si può anche scrivere:  $x' = x + \sqrt{b^2 - y^2} - \sqrt{a^2 - y^2}$ . Sostituiamo nell'equazione della retta:  $y' + mx' = m(\sqrt{b^2 - y'^2} - \sqrt{a^2 - y'^2})$ . Otteniamo (sopprimendo gli apici):  $((y + mx)^2 - m^2(a^2 + b^2 - 2y^2))^2 = 4m^4(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)$  (equazione di quarto grado). In fig. 9 vediamo le trasformate di una circonferenza.

Un altro celebre biellismo che fa uso di un rombo articolato (Delaunay,

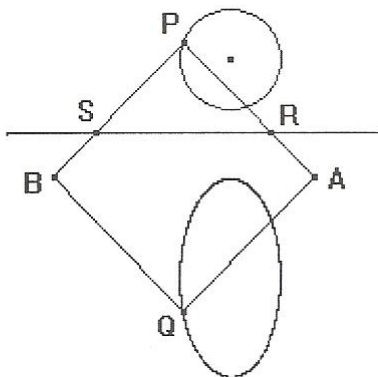


Fig. 10

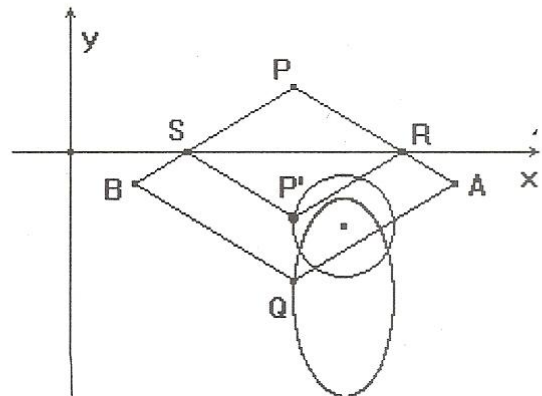


Fig. 11

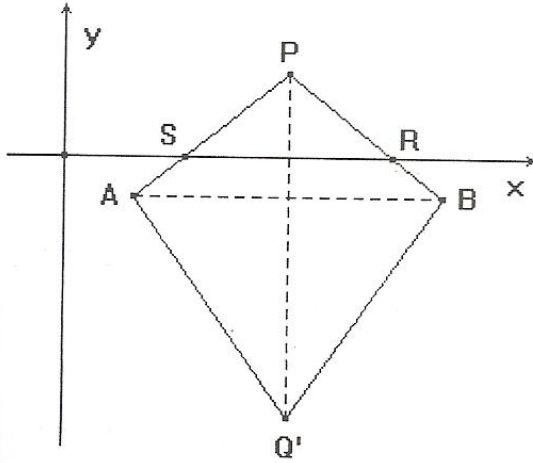


Fig. 12

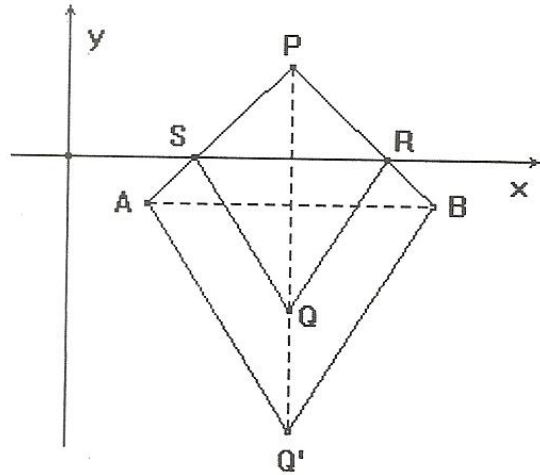


Fig. 12 bis

1895) si vede nella fig. 10. La trasformazione che esso produce (entro le regioni piane limitate in cui opera) è uno stiramento. Se ne è già parlato su queste pagine <sup>(3)</sup> mostrandone l'impiego come ellissografo. Una variante possibile (fig. 11) mantiene, nel riferimento indicato in figura, il segno delle ordinate (P' e Q sono nel medesimo semipiano).

La sostituzione di un deltoide al rombo nel biellismo di fig. 10 produce lo strumento rappresentato in fig. 12 (R ed S sono cursori entro una scanalatura rettilinea; A, B, P, Q' sono cerniere; in P un puntatore, in Q' uno stilo). Se lo usiamo per trasformare una circonferenza (fig.13) non si ottiene più una curva di ordine 2: la trasformazione non è lineare. (Nel disegno è stata inserita la variante già presa in esame, per il caso del rombo, in fig. 11).

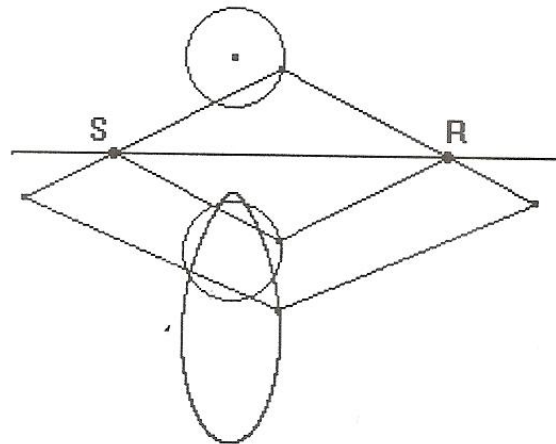


Fig. 13

Un po' di calcoli. Osserviamo la fig.12 bis: essa si ricava dalla fig. 12 tracciando a partire dai punti (cursori) S ed R due rette parallele ai lati AQ' e BQ' del deltoide PAQ'B, le quali, per ragioni di simmetria, si incontrano in un punto Q appartenente a PQ'.

Il nuovo deltoide PSQR, così ottenuto, riproduce il biellismo della fig.6. Abbiamo già dimostrato che è (usiamo le notazioni e il riferimento di allo-

ra:  $P(x;y)$ ;  $Q(x';y')$ ;  $SP = a$ ;  $SQ = b$ :  $y' = -\sqrt{b^2 - a^2 + y^2}$ ; pertanto  $PQ = y + \sqrt{b^2 - a^2 + y^2}$ . Poniamo ora  $SA = c$ ; quando (spostando i cursori S ed R) l'intero sistema si mette in moto, il rapporto

$$PQ' : PQ = AP : SP = (a + c) : a = k$$

è invariante. Perciò  $PQ' = k PQ$ . Posto  $Q(x'; y')$  si ha  $PQ' = y - y''$ , dunque:

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = (1-k)y + k\sqrt{a^2 - b^2 + y^2} \end{cases}$$

### 3. Servomeccanismi per la prospettiva

È noto che i pittori (ma soprattutto gli incisori, gli architetti e gli scenografi) hanno utilizzato a partire dal '400 per eseguire rappresentazioni prospettiche corrette (F. Brunelleschi e L. B. Alberti furono tra i primi), non solo procedimenti grafici dimostrati "more geometrico", ma anche strumentazioni fisico-meccaniche più o meno sofisticate (prospettografi). Questi strumenti ebbero (nei secoli successivi) ampia diffusione a livello europeo. In alcuni di essi comparivano, come servomeccanismi, due sistemi articolati che solo molto più tardi (nell'800) "furono riconsiderati e compresi nella loro effettiva portata matematica, alla luce di concetti generali legati alla teoria astratta delle trasformazioni: la storia delle cose precede spesso quella delle idee" <sup>(4)</sup>

Il primo dei due sistemi articolati è il pantografo di Ch. Scheiner (1631), usato per ingrandire (senza cambiarne la forma) le immagini intercettate dal quadro (che sono troppo piccole, perché vicine al vertice del cono visuale, quando il soggetto riprodotto è molto lontano); il secondo è il doppio parallelogramma articolato (J. Watt, 1765), che aiutava a tracciare le numerose rette (per esempio perpendicolari e parallele alla linea di terra) necessarie in una prospettiva.

Il (notissimo) pantografo di Scheiner è rappresentato in fig. 14.

ABCP è un parallelogramma articolato;  $OB = BQ$ ; O è un perno fissato al piano. Mentre ABCP si deforma, gli invarianti (i soliti: parallelismo dei lati opposti, uguaglianza degli angoli interni opposti) ci assicurano che: a) i punti

O, P e Q (oppure O, P' e Q') inizialmente allineati con O, conservano in ogni istante tale allineamento; b) i triangoli OAP, OBQ (OPP', OQQ') rimangono simili, e i rapporti  $OQ : OP$ ,  $OQ' : OP'$  sono costanti e uguali fra loro. Inoltre la posizione di P o di P' (punti dotati di due gradi di libertà) determina univocamente quella di Q o di Q'. Così tra le regioni piane costituite rispettivamente dall'insieme delle posizioni raggiungibili da P e da Q (oppure da P' e Q') viene stabilita una corrispondenza biunivoca, che in virtù di a) e b) risulta essere una omotetia con centro in O. Quando P (P') (calcatoio) descrive una figura, Q (Q') (stilo) descriverà una figura omotetica, ingrandita nel rapporto (positivo)  $k = OQ : OP$ .

Se si fissa la posizione della retta OPQ (impedendo le rotazioni attorno ad O, è chiaro che P' e Q' descriveranno allora due archi (omotetici) di ellisse (doppio compasso di Van Schooten: cfr. fig.4). Introducendo un riferimento cartesiano normale di centro O, nel quale sia  $P(x; y)$ ,  $Q(x'; y')$  si ricavano subito le equazioni della omotetia:  $x' = kx$ ,  $y' = ky$ . Si deve qui riprendere una osservazione già fatta: non imporre limitazioni alle variabili x, y, lasciare quindi alle equazioni scritte validità globale, implica ipotesi sulla "natura" dello spazio in cui si pensa di agire.

Il doppio parallelogramma articolato (capostipite dei tecnigrafi del primo '900) si vede in fig. 15.

Kempe (1874) lo chiamò traslatore, perché è evidente che (bloccati i vertici

del lato AB in posizione fissa mediante due perni), le frecce orientate  $\overline{PQ}$  (nelle varie posizioni che lo strumento può far loro assumere) sono tutte equipollenti, e dunque rappresentano un unico vettore. Notiamo:

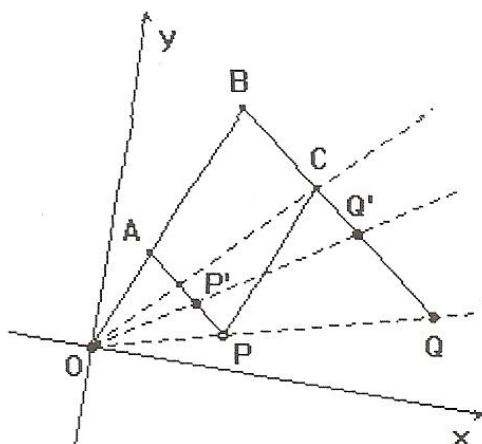


Fig. 14

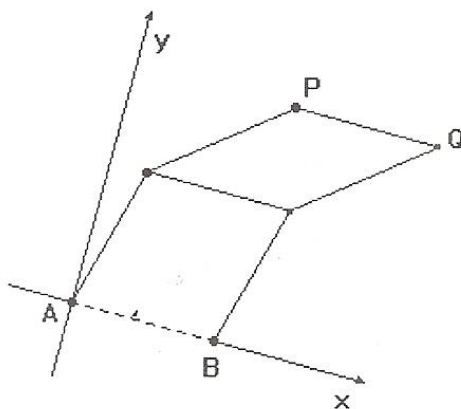


Fig. 15

- se il vettore  $\overline{PQ}$  è nullo, lo strumento si “riduce” al semplicissimo sistema articolato di fig. 16, che può servire (essendo imperniato in A) per tracciare circonferenze (bisogna bloccare l’angolo ACQ costringendolo a una ampiezza costante: abbiamo così un compasso che lavora “in piano”);
- lasciando invece all’angolo ACQ ampiezza variabile, il sistema di fig. 16 rappresenta una identità;
- infine, se le aste AC e CQ hanno la medesima lunghezza, si può utilizzare come un compasso di Van Schooten (fig.4).

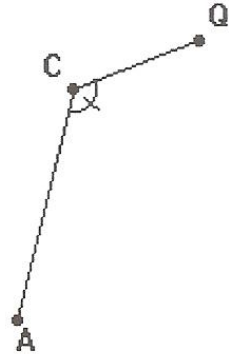


Fig. 16

Queste tre osservazioni sono di elevato interesse didattico, perché mostrano con evidenza che un medesimo oggetto fisico (o figura geometrica) può avere valore diverso (rispettivamente: referenti diversi) secondo le regole d’uso (il contesto concettuale interpretativo).

Il modo più semplice per ricavare le equazioni della traslazione è ancorare il riferimento alla figura in modo che i punti A e B si trovino sull’asse delle ascisse. Si ha subito:

$$y' = y; \quad x' = x + d \quad (d = \text{modulo del vettore } \overline{PQ}).^{(5)}$$

Osserviamo infine che accoppiando due traslatori come in fig. 1 (il perno O è l’unico punto fissato al piano) si può avere automaticamente la somma di due vettori assegnati, con la “regola del parallelogramma” ( $OA + OB = OC$ ). (Addizionatore di Emch).

#### 4. Rotazioni e roto-omotetie

Consideriamo ora il sistema articolato di fig. 17: OABC è un parallelogramma deformabile che può ruotare attorno al perno O fissato sul piano; BCQ e BAP sono due triangoli isosceli simili (angoli al vertice –

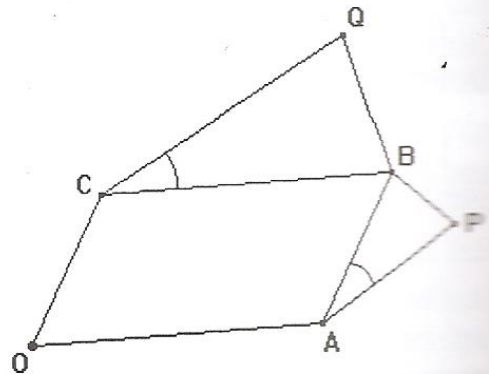


Fig. 17

in C e in A – entrambi uguali ad  $\alpha$ ). I punti P e Q hanno due gradi di libertà; inoltre, fissata la posizione di P, quella di Q è univocamente determinata (e viceversa): dunque, tra le regioni piane che essi “ricoprono” durante il movimento esiste una corrispondenza (biunivoca).

La manipolazione (fisica e virtuale) dello strumento (pantografo del Sylvester, 1874) conduce rapidamente alla congettura corretta: che si tratti cioè di una **rotazione**. Ma in questo caso (a differenza di quanto per es. accade nel biellismo di fig.2: simmetria assiale ortogonale) la dimostrazione non è immediata e presenta (per gli studenti) qualche difficoltà. Quando il parallelogramma si deforma sono invarianti: il parallelismo dei lati opposti, la uguaglianza degli angoli interni opposti.

Segue (cfr. fig. 18) che i triangoli COQ e AOP si mantengono sempre congruenti mentre l'angolo POQ conserva ampiezza  $\alpha$ .

(COP = BDP; ma è COP = COQ + QOP, BDP = OPA + BAP; poiché si ha COQ = OPA risulta QOP = BAP =  $\alpha$ )

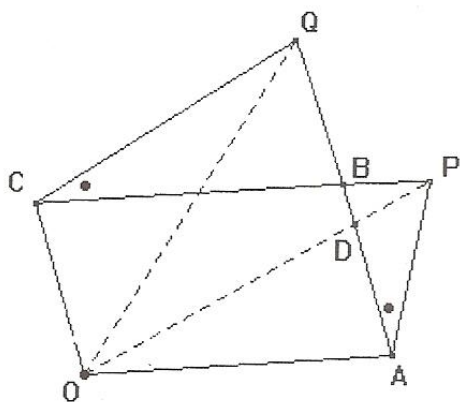


Fig. 18

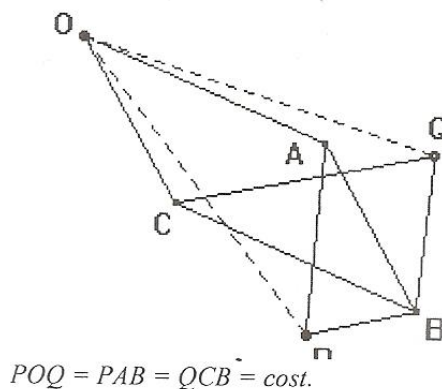


Fig. 19

Dunque OQ è uguale a OP e l'angolo POQ è costante in qualunque configurazione del sistema, anche in quelle (fig. 19) più difficilmente riproducibili in un modello fisico.

Si ottengono subito le equazioni della trasformazione se si usa un sistema di coordinate polari avente in O il polo. Risulta immediatamente, posto  $P(\rho; \vartheta)$   $Q(\rho'; \vartheta')$ :  $\rho' = \rho$ ,  $\vartheta' = \vartheta + \alpha$ .

Sono equazioni formalmente identiche a quelle che rappresentano la tra-

slazione (come quello di una figura, anche il referente di una scrittura simbolica, quindi il suo significato, dipende dal contesto in cui viene interpretata).

Ricordiamo ancora (per l'ultima volta) che, non introducendo limitazioni per le variabili, le equazioni scritte hanno una "portata" globale (estesa a tutto il piano) mentre lo strumento agisce localmente. <sup>(6)</sup>

Se l'angolo  $\alpha$  è piatto (i triangoli BCQ, BAP, COQ, PAB sono allora dege-

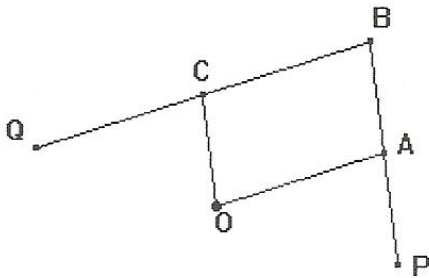


Fig. 20

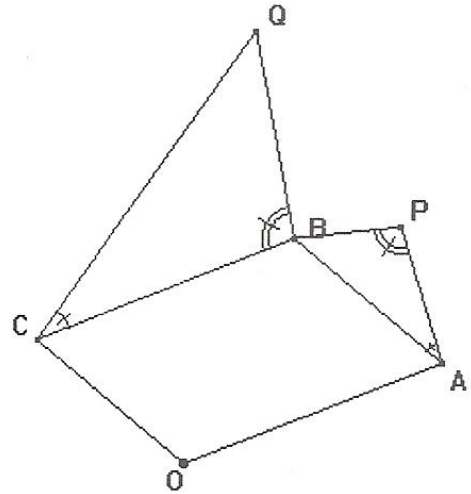


Fig. 21

neri) il pantografo prende l'aspetto che si può vedere in fig. 20 e realizza una simmetria centrale. Ai triangoli isosceli del pantografo per rotazioni si possono sostituire due generici triangoli simili (fig. 21) aventi gli angoli di vertice A e C uguali fra loro ( $BAP = QCB = \alpha$ ): il rapporto di similitudine è ( $CQ : AB = CB : AP = BQ : BP$ ).

Anche in questa nuova situazione i punti P e Q hanno due gradi di libertà, e si corrispondono biunivocamente. Mettendo in moto lo strumento, i triangoli OCQ e OAP (non più uguali fra loro) rimangono tuttavia sempre simili (risulta  $QO : PO = QC : CB = k$ ), e l'angolo POQ mantiene valore costante (ha ampiezza  $\alpha$ , come si dimostra in modo

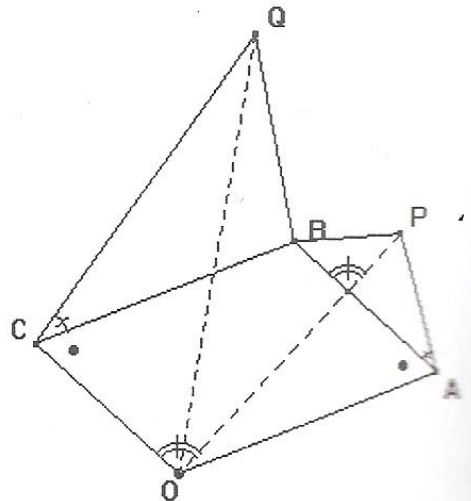


Fig. 21 bis

identico a quello già visto nel caso dei triangoli isosceli). (fig. 21 bis) Perciò, se il puntatore (per es. P) segue il contorno di una figura data, lo stilo Q ne traccia un'altra simile. Precisamente, omotetica (con rapporto  $k$ ) rispetto

alla prima, ma ruotata dell'angolo  $\alpha$ . La trasformazione che il pantografo realizza (localmente) è una roto-omotetia.

Quando l'angolo  $\alpha$  è piatto (e perciò i triangoli simili BAC e QCB degenerano, assumendo l'aspetto di segmenti) il meccanismo si "particolarizza" in quello di fig. 22 (i punti Q, O, P sono allineati perché vale la proporzione  $CQ : CB = AB : AP$ ). In tal caso genera una omotetia con rapporto negativo, e differisce dal pantografo di Scheiner (che dà omotetie con rapporto positivo) solo per la posizione del perno fisso (in P anziché in O) e per la individuazione dei punti corrispondenti. Si può facilmente dimostrare che dato un pantografo di Scheiner predisposto per una omotetia di rapporto  $PQ : PO = k$ , con perno in P (O punto di partenza, Q punto di arrivo) si ottiene, spostando il perno in O, un sistema articolato che produce (Q rimane fisso come punto di arrivo, mentre P diventa punto di partenza) omotetie di rapporto  $OQ : OP = -(k - 1)$ . In particolare, se il pantografo di Scheiner iniziale aveva rapporto 2, si riottiene lo strumento di fig. 20 (simmetria centrale). Quando la simulazione in Cabri di un parallelogramma articolato viene eseguita tenendo conto solo della uguaglianza dei lati opposti (senza imporre il parallelismo), accade che esso, deformandosi, si "intreccia" assumendo la configurazione visibile in fig.

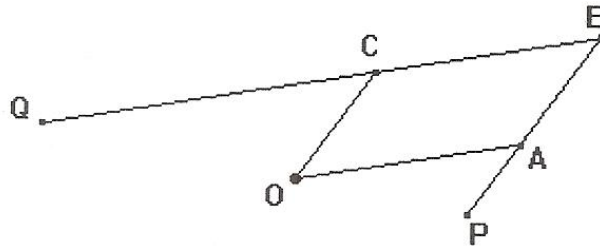


Fig. 22

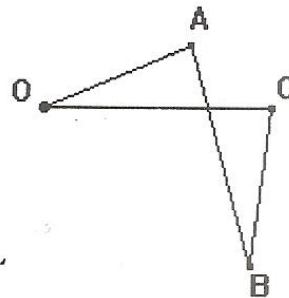


Fig. 23

23 (antiparallelogramma). Anche il corrispondente modello fisico può essere progettato in modo che, muovendolo, ci si trovi fra le mani un antiparallelogramma. Gli antiparallelogrammi sono sistemi articolati importanti, e si prestano ad illustrare una grande varietà di argomenti geometrici, come vedremo nei paragrafi 6 e 7: ma occorre assolutamente evitare la loro formazione durante il funzionamento (concreto o simulato) dei pantografi



di Sylvester (altrimenti l'angolo POQ non ha più ampiezza costante) e dei traslatori (altrimenti le frecce  $\overrightarrow{PQ}$  non si mantengono equipollenti).

## 5. La trisezione dell'angolo e le Rodonee

Prima di passare alla descrizione di altri curvigrati e altre apparecchiature per trasformazioni geometriche, mostriamo un esempio di sistema meccanico inventato per risolvere un particolare problema di geometria. Si tratta della trisezione dell'angolo: problema celebre perché attorno ad esso si affaticarono molto i geometri dell'età classica, nel vano tentativo di affrontarlo con gli strumenti canonici della geometria di Euclide (riga e compasso). Il "compasso" (non euclideo) di fig. 24 è un elegante trisettole. Le quattro aste AB, AC, AD, AE, articolate in A, sorreggono nei punti F, I, K, L altre quattro cerniere, vertici di due rombi uguali AFGK ed AIHL, i cui ulteriori vertici G e H (opposti ad A) sono guidati da due cursori che li fanno scorrere lungo AC e AD rispettivamente. Aprendo e chiudendo i due lati "esterni" di questo compasso (AB e AE) le aste interne trisecano l'angolo BAE, qualunque sia la sua ampiezza: conseguenza quasi immediata del fatto che ognuna di tali aste è (e rimane durante il movimento) asse di simmetria del rombo avente il vertice nel cursore da essa sostenuto. Questo biellismo è una invenzione giovanile di Cartesio (1619), il quale lo scoprì durante manipolazioni meccaniche eseguite allo scopo di studiare il problema dell'inserimento di medie proporzionali fra due grandezze assegnate (l'interesse di Cartesio per i meccanismi ne ha profondamente caratterizzato la vita e l'opera).

L'entusiasmo (confidato subito all'amico Beekman) che egli ricavò dalla sua scoperta (anche perché accompagnata a quella di altri "compassi" per la soluzione delle equazioni, la generazione di curve ecc.) era pienamente giustificato. La soluzione prodotta ha grande generalità (inserendo altri rombi si può avere non solo la trisezione, ma la polisezione di un angolo), inoltre

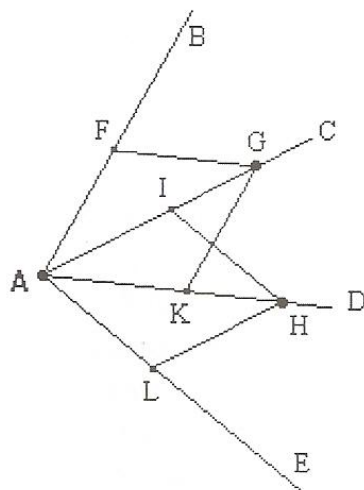


Fig. 24

la potenza dello strumento è tutta “interna” ad esso, non proviene cioè da studi svolti su una particolare classe di problemi.<sup>(7)</sup>

C'è un modo di usare il trisettole che sposta l'attenzione sulla traiettoria descritta dal punto G. Sia per esempio da trisecare l'angolo XOY (fig. 25). Sovrapponiamo al lato OX un trisettole chiuso (quindi G si troverà su OX). Inseriamo in G uno stilo e apriamo il nostro strumento: il punto G si muove e lo stilo ne disegna la traiettoria  $\gamma$ . Quando G ha oltrepassato OY, solleviamo il trisettole e mettiamolo da parte. Con un compasso (euclideo) centrato in O riportiamo ora AF (lato di uno dei rombi) su OY; poi, con centro nel secondo estremo F, descriviamo un arco che intersechi  $\gamma$  in T. L'angolo YOT è un terzo di XOY. Quindi la curva  $\gamma$  è una trisettrice. Possiamo vederla in fig. 26. E' una epicycloide che viene talvolta chiamata “Rosa del Grandi” perché fa parte di una ampia famiglia di curve (le “rodonee”) che fu studiata da G. Grandi in un opuscolo del 1728.<sup>(8)</sup>

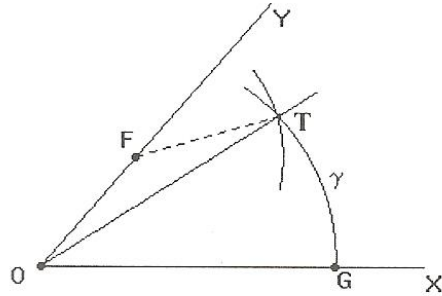


Fig. 25

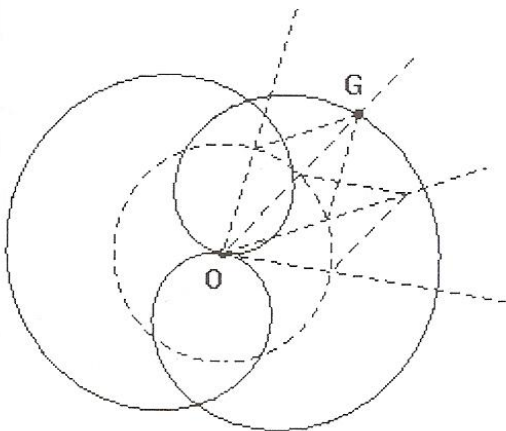


Fig. 26

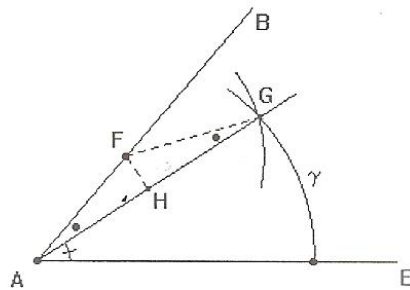


Fig. 27

È facile ottenerne l'equazione in coordinate polari (fig. 27):  
 se l'asse polare è AE, il polo A, il raggio  $\rho = AG$ , l'argomento  $\alpha = GAE$ ,

ponendo  $AF = FG = a$  si ricava  $\rho = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$ .

In coordinate cartesiane (origine in A e asse delle ascisse coincidente con AE) si ottiene (con pochi calcoli) la equazione di sesto grado:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2a^2)^2 = 4a^4 x^2 \quad (\#)$$

Molti anni più tardi (1899) Schilling dimostrò il seguente enunciato:

“Se in un rombo articolato OACB i lati OA, OB ruotano attorno ad O con velocità costanti, ma diverse, il quarto vertice B descrive una epicicloide”.<sup>(9)</sup>

Questo teorema generale non fa cenno al problema della ripartizione di un angolo in parti uguali, ma in esso rientra come caso particolare la generazione della curva (#). L'enunciato, contrariamente a quanto avviene nei teoremi di “geometria organica” (o geometria del movimento), fa intervenire grandezze fisiche: inoltre non spiega come generare praticamente le velocità costanti (e diverse) richieste dall'ipotesi.

## 6. Antiparallelogrammi e sistemi articolati

Abbiamo già presentato l'antiparallelogramma (cfr. fig. 23): conosciamo anche (cfr. Progetto Alice, 2001, vol. II, n° 1, pag. 146) la possibilità di utilizzarlo come ellissografo (Fig 28, Van Schooten, 1636).

Aggiungiamo qui che, tenendo in contatto due ellissi uguali (ritagliate in una lastra di legno o di metallo) con una giunzione come quella di fig. 29 (A, B, C, D, vertici del antiparallelogramma intrecciato, si trovano nei fuo-

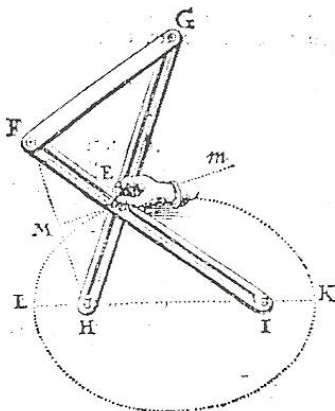


Fig. 28

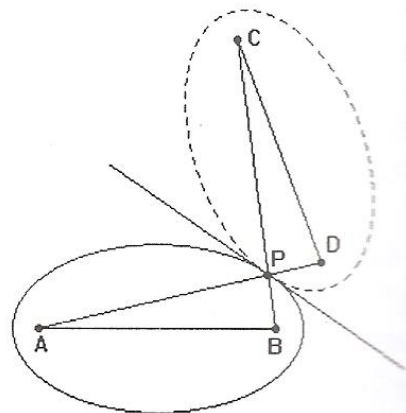


Fig. 29

chi delle due ellissi; A e B sono perni fissati nel piano; C e D sono cerniere; P è il punto di contatto) esse rotolano l'una sull'altra senza strisciare. La tangente comune alle due ellissi è l'asse di simmetria del trapezio individuato dall'antiparallelogramma.

Supponiamo invece che l'antiparallelogramma sia utilizzato come in fig. 30: AD, uno dei lati maggiori, è bloccato sul piano; attorno ai perni A e D ruotano i due lati minori, collegati con cerniere al quarto lato CB (uguale ad AD); il punto di intersezione P delle rette r ed s (prolungamento dei lati minori) descrive una iperbole di fuochi A, D.

Per ogni P è infatti  $PA - PD = AB = \text{costante}$  (proprietà metrica dell'iperbole).

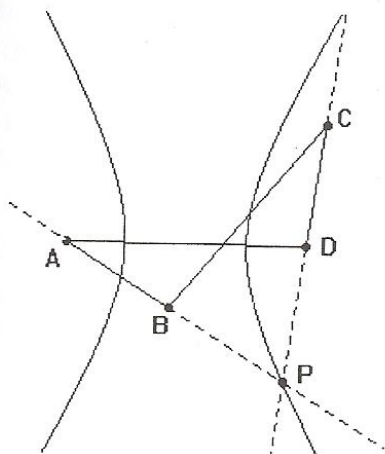


Fig. 30

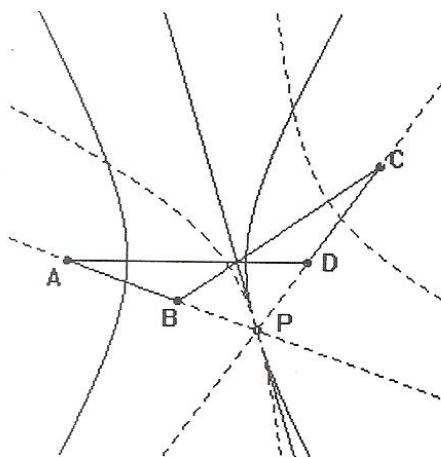


Fig. 31

Se oltre all'iperbole descritta da P se ne considera un'altra uguale avente come fuochi gli estremi del lato CB e solidale con questo nel suo movimento (fig. 31) si può constatare che tali iperboli, durante la deformazione dell'antiparallelogramma, rotolano una sull'altra senza strisciare. La tangente comune alle due iperboli è l'asse di simmetria del trapezio individuato dall'antiparallelogramma.

L'invariante su cui si basano i due precedenti sistemi articolati è l'uguaglianza dei lati opposti: ma, quando l'antiparallelogramma si deforma, rimangono uguali fra loro (come nel parallelogramma articolato) anche gli angoli interni aventi vertici opposti. Questa proprietà viene sfruttata nel semplice "ribaltatore" di fig. 32 (cfr. per esempio Kempe, 1875).

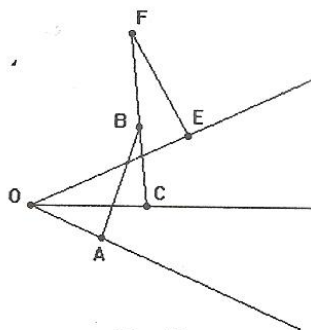


Fig. 32

Occorrono sei aste: tre di queste (molto più lunghe delle altre) sono imperniate in O; le altre tre (più corte, con  $FC > AB$ ,  $AB = FE$ ) servono per collegarle. I punti di collegamento A, C, B ed E (dove si trovano le cerniere) sono scelti in modo che (cfr. sempre fig. 32) risulti:  $OC = AB = FE$ ,  $OA = BC$ ,  $OE = FC$ . Inoltre deve essere  $OA : OC = OC : OE$  (OC medio proporzionale tra OA ed OE). Queste condizioni assicurano la similitudine dei due antiparallelogrammi OABC ed OCFE; gli angoli omologhi EOC e COA si mantengono uguali durante la deformazione del sistema (le aste OE ed OA sono quindi in ogni istante simmetriche rispetto ad OC).

Ecco due notevoli applicazioni del “ribaltatore”.

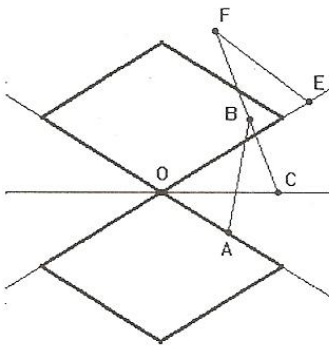


Fig. 33

(fig. 33). Utilizzando quattro aste di identica lunghezza MP, PN, QI, QL incernierate sulle rette simmetriche OE ed OA, si dispongono, nei semipiani opposti di origine OC, due rombi articolati uguali fra loro. E' ovvio che i punti P e Q sono allora corrispondenti in una simmetria assiale ortogonale di asse OC. Rispetto allo strumento di fig. 1 si noterà che: l'asse è variabile (può ruotare attorno ad O); non ci sono cursori (è un sistema articolato, non un biellismo).

(fig. 34). Dopo aver bloccato nella loro posizione i punti O e C con due perni fissati al piano, si toglie l'asta OC. Si costruisce, con altre due aste uguali fra loro incernierate su OE ed OA nei punti R ed S tali che  $OR = OS$ , un deltoide articolato ORPS. Deformando il sistema, il punto P è costretto a muoversi sulla retta passante per O e C (diagonale del deltoide).

Quest'ultimo strumento (Kempe, 1875)<sup>(10)</sup> riesce così a far scorrere un punto su una traiettoria rigorosamente rettilinea, ma non predeterminata in senso fisico (attraverso scanalature, righe, ecc.): è uno dei numerosi modi per risolvere il cosiddetto “problema della guida rettilinea”, al quale molti geometri, prima del 1864 (anno in cui apparve la celebre soluzione di Peaucellier, che utilizzava una proprietà dell'inversione circolare) dubitavano di poter dare risposta positiva.

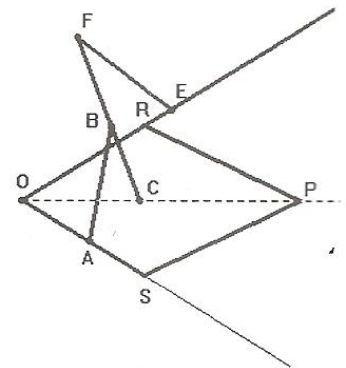


Fig. 34

7. Sistema biella - manovella: casi particolari

Su un piano  $\pi$  si fissino due perni A e B (fig. 35) attorno ai quali (nel medesimo piano) ruotino due aste (di legno o metallo) AD e BC (manovelle). I punti D e C si colleghino fra loro (mediante cerniere) con una terza asta rigida DC (biella), scegliendone la lunghezza in modo tale da consentire la deformazione del sistema. Si tratta di un meccanismo molto studiato, noto come quadrilatero di Watt (o sistema biella - manovella). Solo se  $AD = BC$  e se inoltre  $AB = CD$ , entrambe le manovelle compiono un giro completo attorno ai centri di rotazione A e B. Nel seguito supporremo che ciò si verifichi.

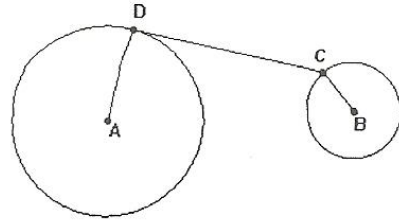


Fig. 35

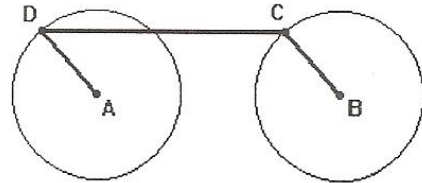


Fig. 36

Possiamo (fig. 36) fare in modo che durante il loro movimento le aste (manovelle) AD e BC rimangano sempre (in ogni istante) parallele fra loro (sicché ABCD è un parallelogramma): la sbarra CD costituisce in tal caso quella che i meccanici chiamano una “biella di accoppiamento”, ed è chiaro che ogni punto di CD (anzi: ogni punto di un piano  $\sigma$  solidale a CD e avente la medesima giacitura di  $\pi$ ) descrive una cir-conferenza di raggio  $AD = BC$ .

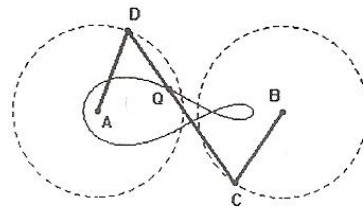


Fig. 37

Più interessante la configurazione rappresentata in fig. 37, dove ABCD è un antiparallelogramma: se tale si conserva durante il movimento, ogni punto della biella DC (o del piano  $\sigma$  ad essa solidale) traccia allora una quartica (in figura si vede quella generata dal punto Q). Invece

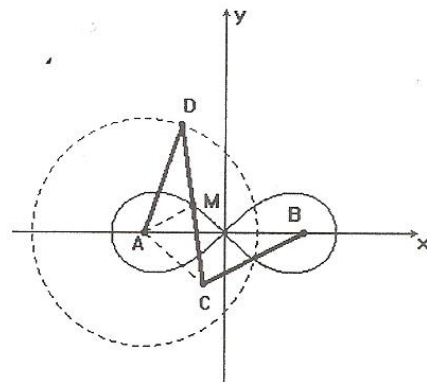


Fig. 38

il centro istantaneo di rotazione della biella descrive (su  $\pi$ ) una ellisse o una iperbole: riappaiono (ma “letti” in modo diverso) i conicografi esaminati nel paragrafo 6.

Studiamo un caso particolare notevole.

Sia M il punto medio della biella CD (fig. 38). Poniamo:  $CD/AD = k$ . Si ha quindi:  $AD/DM = AD/(CD/2) = AD/(k/2)AD = 2/k$ ; perciò, se  $k = \sqrt{2}$  (cioè se AD e CD sono rispettivamente lato e diagonale di uno stesso quadrato) si ha  $CD/AD = AD/DM$  e i triangoli ADC, ADM risultano simili. In modo analogo si dimostra (sempre nell'ipotesi  $k = \sqrt{2}$ ) la similitudine dei triangoli BCD, BDM. Conseguentemente, anche i triangoli AMD, MBD sono simili (ricordare che nel trapezio ACBD, individuato dall'antiparallelogramma, i due angoli adiacenti a una base sono uguali fra loro). Segue la proporzione  $AM : DM = DM : MB$ , cioè  $(AM)(MB) = DM^2 = \text{costante}$ . La traiettoria di M è dunque il luogo dei punti del piano tali che il prodotto delle loro distanze da due punti fissi (A e B) è costante (**lemniscata di G. Bernoulli**) Nel riferimento di fig. 38, posto:

$A(-a\sqrt{2}; 0)$ ,  $B(a\sqrt{2}; 0)$ ,  $M(x; y)$  otteniamo con semplici calcoli l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

## 8. Antiparallelogrammi e trisezioni dell'angolo

Gli antiparallelogrammi articolati simili, che abbiamo visto all'opera nel sistema articolato del Kempe per la “guida rettilinea” (fig. 34), possono essere anche utilizzati per la costruzione di un Trisettole (da confrontare con quello analogo di Cartesio, in cui compaiono invece, come organi meccanici fondamentali, parallelogrammi non intrecciati).

Occorrono (fig. 39) tre antiparallelogrammi simili, concatenati in modo che uno dei lati maggiori di ciascuno sia uno dei lati minori del successivo. La figura chiarisce come eseguire il montaggio (O è un perno; A, B, C, D, ecc. sono cerniere).

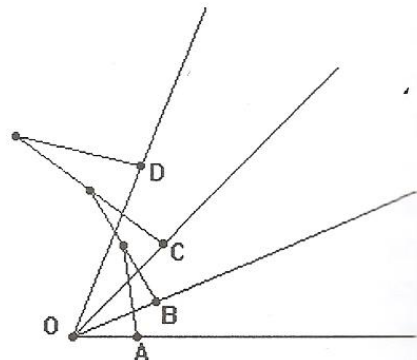


Fig. 39

Ovviamente, con una catena più lunga di antiparallelogrammi simili (assemblati col medesimo criterio) si può costruire un sistema articolato adatto alla suddivisione di un angolo in un qualsiasi numero di parti uguali.

Se la catena ha solo due elementi si ottiene la bisezione dell'angolo, ossia il ribaltatore già considerato al paragrafo 7 (fig. 32).

## 9. Avvertenza

I meccanismi presi finora in considerazione sono soltanto una piccola parte di quelli in cui agiscono parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati. Abbiamo, ad esempio, escluso strumenti che realizzano localmente l'inversione circolare (e i numerosi curvigrati a cui danno origine), biellismi che illustrano la teoria della polarità rispetto a una circonferenza o a una conica, ecc.: ne riparleremo in qualcuno dei prossimi interventi.

I modelli descritti sono conservati presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

(vedi: <http://www.museo.unimo.it/theatrum>)

## Note

(1) H.J.M. Bos, Arguments on motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations, 1637 – ca. 1750; *Archive for History of Exact Sciences*, vol.30, 1983

(2) Sul compasso di Van Schooten cfr.: Pergola – Zanolì – Martínez – Turrini, Modelli fisici per la matematica: sulle sezioni del cilindro retto, *Progetto Alice* n°4, vol. II, 2001-I pag.147-148

(3) cfr.: *Progetto Alice* n°4, vol. II, 2001-I pag. 148.

(4) G. Koenigs, *Leçons de Cinématique*, Paris, 1897, par. 86

(5) Ci si può chiedere anche in questo caso quale sia la forma delle regioni piane che un determinato traslatore pone in corrispondenza (e quali siano di conseguenza le limitazioni a cui sottoporre le variabili  $x$  e  $y$ ). La risposta (ottenibile anche per via empirica) non è comunque univoca, perché dipende in modo essenziale dai vincoli (materiali nella realtà del modello fisico, logici nelle sue simulazioni al computer) a cui sono costretti gli elementi mobili del sistema articolato.

(6) Cfr. nota precedente.



---

<sup>(7)</sup> W. R. Shea, *La magia dei numeri e del moto (René Descartes e la scienza del Seicento)*, Bollati Boringhieri, Torino 1994, cap.3.

<sup>(8)</sup> G. Grandi, *Flores Geometrici ex Rhodonearum et Cloeliarum curvarum descriptione resultantes, ecc* Florentiae, 1728

<sup>(9)</sup> F. Schilling, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Leipzig 1899, 44, pag. 214-277.

<sup>(10)</sup> A. B. Kempe, *How to draw a Straight line: a lecture on Linkages*, New York 1953 (ristampa).

**Marcello Pergola**  
**Carla Zanoli**  
**Annalisa Martinez**  
**Marco Turrini**