Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo N°15

F. VAN SCHOOTEN

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM LIBER IV, SIVE DE ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE TRACTATUS. (ED. 1657). (CAP. VI, XII, XIII).

Cap. VI.

Sulle iperboli che si descrivono con un moto pilotato nel piano, sia attorno agli estremi degli assi, sia attorno agli estremi di due qualsiansi diametri coniugati.

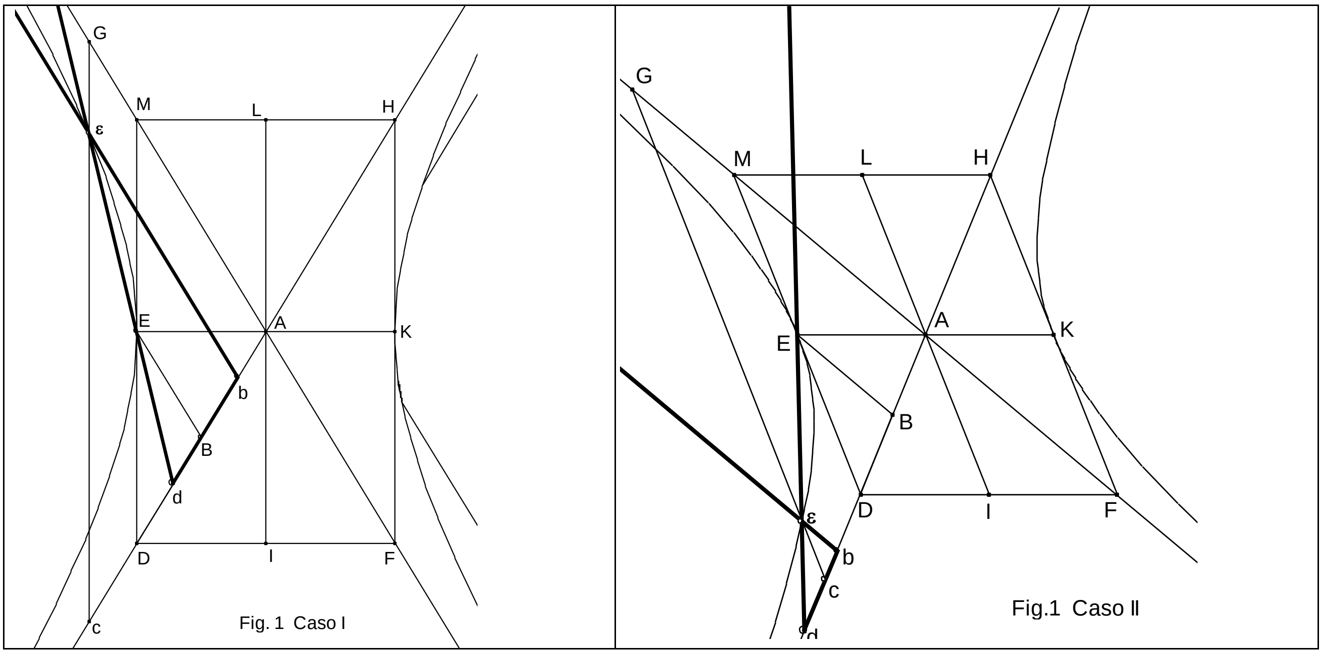


Fig. 1 Caso I

Fig.1 Caso II

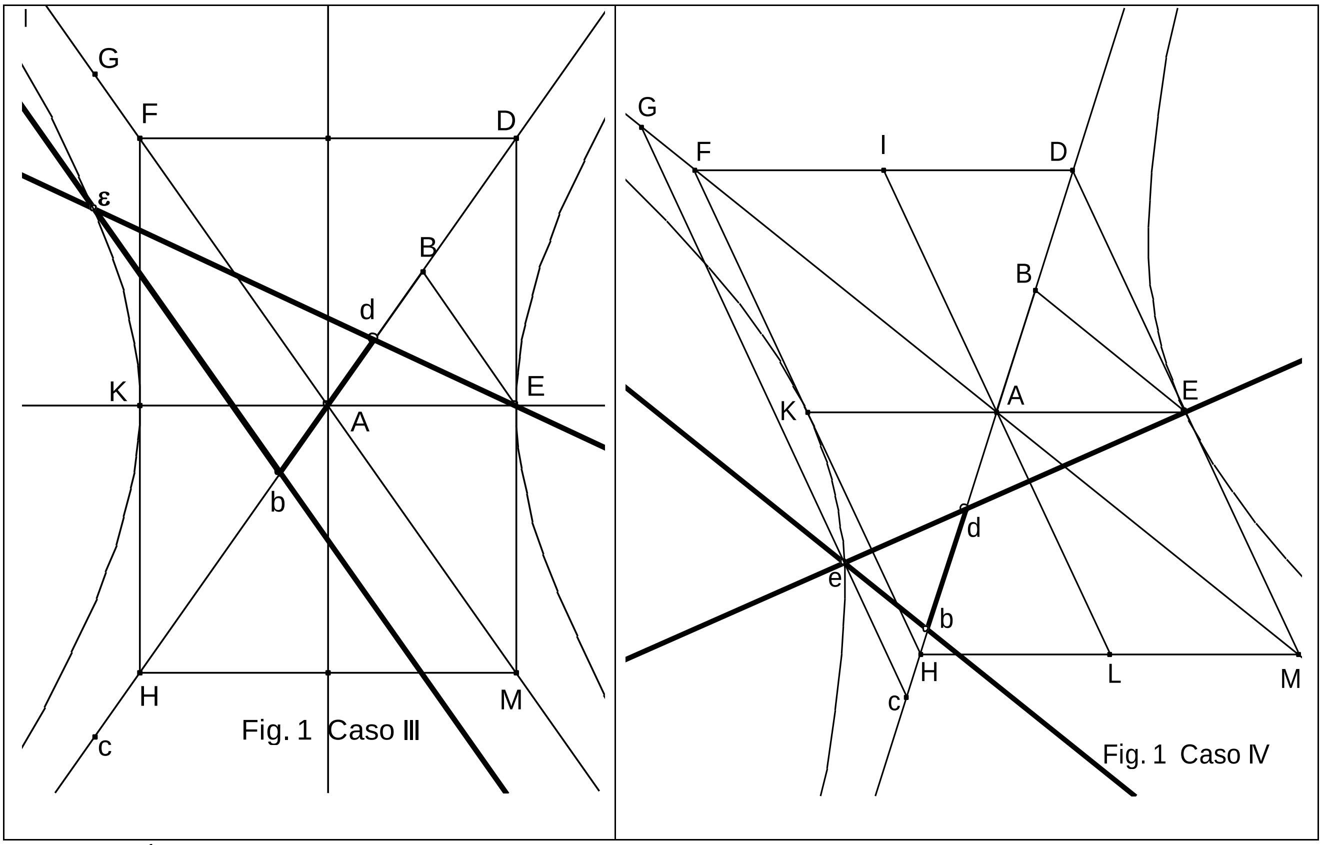


Fig. 1 Caso III

Fig. 1 Caso IV

Le rette [1] EK, LI (Cfr. Fig. 1) si intersechino nel loro punto medio A; per i punti L, I si traccino le parallele a EK; per i punti E, K si traccino le parallele a LI; i punti D, F, H, ed M, in cui tali parallele si incontrano, formano un parallelogramma DFHM, del quale consideriamo le diagonali DH, FM prolungandole all'infinito. Sia B il punto medio di AD; congiungiamo B ed E: costruiamo poi un angolo dbε (formato da aste rettilinee) uguale all'angolo DBE nei casi I e II di Fig. 1, uguale invece all'angolo ABE nei casi III e IV di Fig. 1. Il lato db dell'angolo dbε sia costruito uguale a BE (nei casi I e II; nei casi III e IV db=AB) mentre il lato bε sia prolungato indefinitamente oltre **ε.**
Sopra l'estremo b del lato db sia poi imperniata un'asta dE che si estenda indefinitamente dall'una e dall'altra parte di b, e possa ruotare liberamente nel piano intorno al perno b.
Se l'angolo così costruito scivola nel piano lungo la retta AD (in modo cioè che il lato bd sia sempre sovrapposto alla retta AD), mentre l'asta dE passa sempre per il punto fisso E intersecando bε in ε: allora il punto ε descrive nel medesimo piano una iperbole di centro A, diametro trasverso KE, diametro a questo coniugato LI, asintoti coincidenti con le rette DAH, MAF.
Per dimostrarlo, disegniamo la retta cεG passante per ε, parallela a DM, secante nei punti c, G le rette DH, FM (cfr. Fig. 1). Vale la proporzione:
bc : Ab = cε : εG (si deduce dai triangoli simili bεc, AcG); da questa proporzione, componendo: Ac : Ab = cG : εG; inoltre, permutando:

[1] Il termine ***retta*** equivale per gli autori antichi (come già più volte osservato) al nostro ***segmento***

Ac : cG = Ab : εG. Ma il rapporto Ab : εG è uguale al rapporto tra i rettangoli (che hanno la medesima altezza) Ab×cε e εG×cε, mentre il rapporto Ac : cG è uguale al rapporto BD : DE (confrontare i triangoli simili AcG, BDE) quindi anche al rapporto tra il rettangolo BD×DE e il quadrato DE×DE (aventi la medesima altezza). Si può dunque scrivere:
(Ab×cε) : (εG×cε) = (BD×DE) : (DE×DE) (*). Osserviamo ora che è
(Ab×cε) = (BD×DE) (**): vale infatti la proporzione
Ab : BD = DE : cε. (Quest'ultima si ricava, utilizzando le uguaglianze Ab=Bd, BD=bd, dal confronto tra due coppie di triangoli simili: dBE, dbε e DBE, cbε). (Euclide, "*Geometria*" proposizione 4 del libro sesto).
Ma dalle (*) e (**) segue subito che è anche (εG×cε) = (DE×DE): ciò prova (cfr. Apollonio, "*Coniche*", prop. 10 del libro secondo) che il punto ε appartiene a una iperbole avente come asintoti le rette DAH, MAF, come diametro trasverso EK, come diametro a questo coniugato LI, e centro A.
Poiché questo è vero qualunque sia la posizione di ε, segue che durante il moto delle rette bε, εd la loro intersezione ε descrive nel piano, con continuità, l'iperbole di diametri EK, LI. Ciò appunto si voleva dimostrare.
E' inoltre chiaro che se cambiamo la posizione dell'asta dE facendola passare per K, e poi disponiamo l'angolo dbε dall'altra parte della retta AD, avremo nel piano un altro arco di iperbole, simmetrico del primo rispetto ad A, e tracciato allo stesso modo.

Nello scholium aggiunto a questo capitolo, dopo aver osservato che qualsiasi circonferenza è definibile come ellisse in cui lato retto e lato trasverso sono uguali, Van Schooten nota che anche nell'insieme delle iperboli si possono considerare quelle (più semplici di tutte le altre) aventi la medesima proprietà (noi le chiamiamo iperboli equilatere).
Confronta poi due superfici piane: una compresa fra una linea retta e un arco di iperbole qualsiasi, l'altra compresa fra una linea retta e un arco di iperbole equilatera, e dimostra (utilizzando anche il principio di Cavalieri come aveva già fatto nello scholium al Cap. II) alcuni teoremi sul rapporto tra le rispettive aree.
Nel Cap. VII sono fornite istruzioni per costruire e utilizzare (sulla base di quanto dimostrato nel Cap. VI) strumenti adatti a tracciare nel piano o
Il Cap. VIII è dedicato nuovamente alla ellisse: si descrivono diversi modi per disegnarla in un piano sul quale siano assegnati fuochi e vertici della curva. Nel Cap. IX il medesimo problema è affrontato e risolto nel caso dell'iperbole (tracciare una iperbole conoscendone fuochi e vertici). In questi due ultimi capitoli (VIII e IX) vengono presentati non solo sistemi articolati, ma anche strumenti a filo teso.

I successivi Cap. X e XI insegnano infine a disegnare nel piano ellissi e iperboli di cui si conoscano lato retto e lato trasverso.

Cap. XII.

Il capitolo inizia risolvendo il problema di tracciare una iperbole dati i suoi asintoti e un punto appartenente alla curva. Poi così prosegue:

E' ora il momento di dedicare qualche pagina alla parabola, e a come tracciarla in modo organico nel piano. Premettiamo un lemma che sarà utile per le ulteriori dimostrazioni.

Lemma.
Sia data una parabola (Fig. 2 e 2bis) il cui asse sia AC e il vertice A; preso un punto qualunque D della curva, si consideri l'ordinata DC. Si collochi sull'asse, a destra di A, la retta AB (cfr. Fig. 2 e nota 2) uguale alla quarta parte del lato retto l, poi si tracci BD. Io dico che BD = EC (cfr. sempre Fig.2), essendo EC = EA + AC, ed E un punto dell'asse (a sinistra di A) tale che EA = AB.

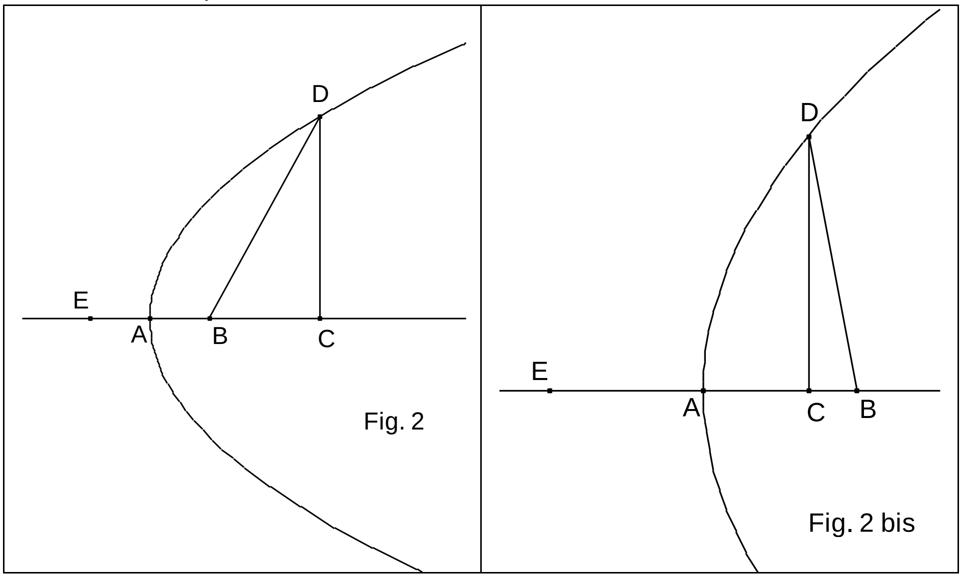


Fig. 2

Fig. 2 bis

Trascriviamo la dimostrazione di Van Schooten, utilizzando per comodità la scrittura algebrica.

Tesi: BD = EC

Ipotesi: (a): AB = EA = − ; (b): (cfr. prop. 12 "Coniche" di Apollonio); (c): AC = AB + BC .

Si ha (ipotesi (c)):

[2] Il termine ***retta*** equivale per gli autori antichi (come già più volte osservato) al nostro ***segmento***

Quindi (ipotesi (a)):

–

Aggiungiamo ad entrambi i membri della precedente uguaglianza. Si ottiene.

– cfr. ipotesi (b)) =

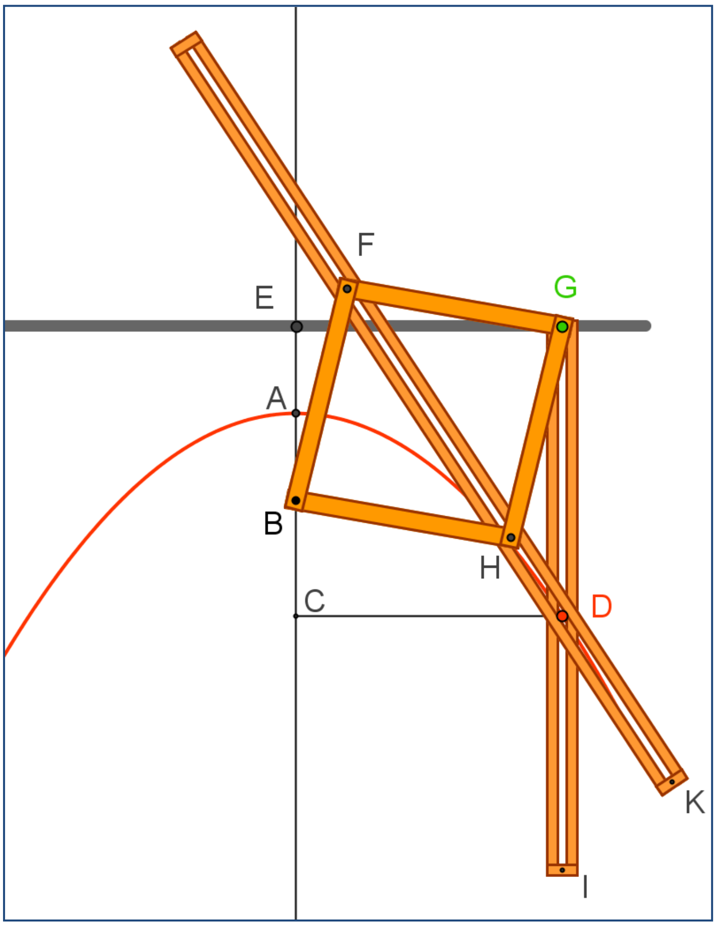
= – (cfr. ipotesi (a)) =

Si deduce allora (essendo per il teorema di Pitagora):

Quindi (cfr. Fig. 2) BD = EC, come volevasi dimostrare.

Cap. XIII.

Sul modo di descrivere le parabole nel piano, essendo noti asse, vertice e lato retto.



In un piano qualsiasi siano dati (cfr. Fig. 3): la retta AC (asse della parabola), il punto A (vertice della parabola) e il punto B (appartenente alla retta AB3) tale che 4AB sia il lato retto della parabola.
Ci proponiamo di costruire uno strumento che possa descrivere la parabola.
Si prolunghi AC oltre A fino ad E, in modo che AB = AE. Si tracci la retta EG (perpendicolare ad EC passante per E), prolungandola indefinitamente da entrambe le parti. Si prendano poi quattro aste rigide uguali fra loro BF, FG, GH, HB di lunghezza arbitraria ma non minore di AB, le cui estremità dovranno essere collegate fra loro in

[3] Il termine ***retta*** equivale per gli autori antichi (come già più volte osservato) al nostro ***segmento***

modo da formare un rombo (o un quadrato) BFGH. (Fig. 3).
Le aste FG e HG saranno congiunte infilandole (come mostrato in figura) in un perno fissato al punto G dell'asta mobile GDI, la quale per tutta la sua lunghezza è tagliata a metà da una scanalatura rettilinea che inizia proprio in G (la immaginiamo prolungata indefinitamente oltre il punto I) e deve mantenersi sempre equidistante dalla retta AE, cioè perpendicolare ad EG.
Nel punto B del piano sarà invece inserito un perno che attraversa le aste FB e BH (le quali pertanto ruotano attorno al punto fisso B).
Un'altra asta FH (anch'essa tagliata a metà da una scanalatura identica a quella dell'asta GDI) sarà poi fissata in F alla cerniera che collega BF ad FG (così le tre aste possono liberamente ruotare attorno ad F), e costretta a passare sempre per il punto H in cui sono connesse BH e HG: a tale scopo un piccolo cilindro saldato in basso a una lastrina mobile sul piano e stabilizzato con vite e rondella nella parte superiore, perfora in H (collegandole) le aste BH e HG, e attraversa la scanalatura di cui è dotata FH. Si intende che il diametro del cilindro e la larghezza della scanalatura sono uguali (ciò consente uno scorrimento regolare dell'asta FH).
Infine, si dispongano due anelli quadrangolari I e K (cfr. Fig. 3) lungo le aste FH e GD in modo che (circondandole completamente) conservino alle scanalature la medesima larghezza e possano inoltre scorrere liberamente lungo le aste (può essere necessario quando si utilizza lo strumento) (*animazione*).

Ciò fatto, ecco come si può descrivere la parabola. (Cfr. sempre Fig. 3).
Si disponga un'asta rettilinea rigida lungo EG. Si prenda uno stilo cilindrico il cui diametro si adatti perfettamente alla larghezza delle scanalature che percorrono GD ed FH. Si introduca lo stilo in entrambe le scanalature, nel punto D dove esse si incrociano. Mentre l'asta GD (perpendicolare a EG) viene spostata da E verso G (mantenendola costantemente premuta contro l'asta rettilinea disposta lungo EG, in modo che GD ed EG siano perpendicolari) lo stilo D, muovendosi, descrive una curva AD che risulta essere un arco della parabola richiesta. Scambiando fra loro le funzioni dei punti G e B si potrà tracciare allo stesso modo (dall'altra parte dell'asse AC) l'arco AL della medesima parabola.
Osserviamo infine che, volendo tracciare archi della parabola che si estendano (in modo indefinito) oltre D ed L, occorrerà scegliere quattro altre aste BF, FG, GH, BH più lunghe delle precedenti. Aumentando a piacere la lunghezza di tali aste, si potrà aumentare a piacere anche la lunghezza degli archi tracciati. Non si potrà mai comunque disegnare tutta la curva, perché la sua natura è tale che, anche se le due parti simmetriche rispetto all'asse tendono ad assumere la medesima direzione, esse tuttavia non si riuniranno mai nemmeno se prolungate all'infinito.

Resta da dimostrare che la linea così tracciata è una parabola. Ciò discende manifestamente dal lemma che abbiamo premesso (Cfr. Cap. XII).

Congiungiamo infatti B con D, e tracciamo DC perpendicolare ad AC. I triangoli BFH, HFG hanno i due lati HB, BF rispettivamente uguali ai due lati HG, GF, e la base FH in comune: quindi l'angolo BFH è uguale all'angolo HFG. Ma anche i triangoli DBF, DFG hanno rispettivamente uguali i due lati BF, FD e i due lati GF, FD (si noti che FD è lato comune ad entrambi), quindi (come già sappiamo) l'angolo BFD è uguale all'angolo DFG. Segue che la base BD è uguale alla base DG, e che l'angolo BDF è uguale all'angolo FDG (sottendono lati uguali). Poiché sappiamo che CE = DG, sarà anche BD = CE. Il punto D si trova dunque (Cfr. Lemma dimostrato) sulla parabola di Asse AC, vertice A, lato retto uguale a 4AB. Poiché nello strumento descritto le aste FH, GD si intersecano sempre (anche all'infinito) e il punto D ha sempre le stesse proprietà, la curva così tracciata è proprio la parabola richiesta.
Possiamo anche osservare che l'asta FDK (o più esattamente la retta FD individuata dalla sua scanalatura) è sempre tangente in D alla parabola descritta. Abbiamo infatti già visto che gli angoli BDF ed FDG sono uguali; l'angolo FDG è però uguale anche all'angolo (opposto al vertice) IDK, e così la linea retta FDK è tangente alla parabola in D, come mostra chiaramente la prop. 41 nel libro 9 della "Prospettiva" di Vitellione.
Si deve poi osservare che gli ottici sono soliti indicare il punto B come fuoco della parabola, perché se esponiamo al sole uno specchio concavo levigato con un profilo parabolico in modo che i raggi solari incidano sullo specchio parallelamente all'asse del profilo utilizzato, tutti i raggi riflessi passeranno per il punto B: con superficie speculari di questo tipo, in B si potrà dunque accendere un fuoco.

Scholium

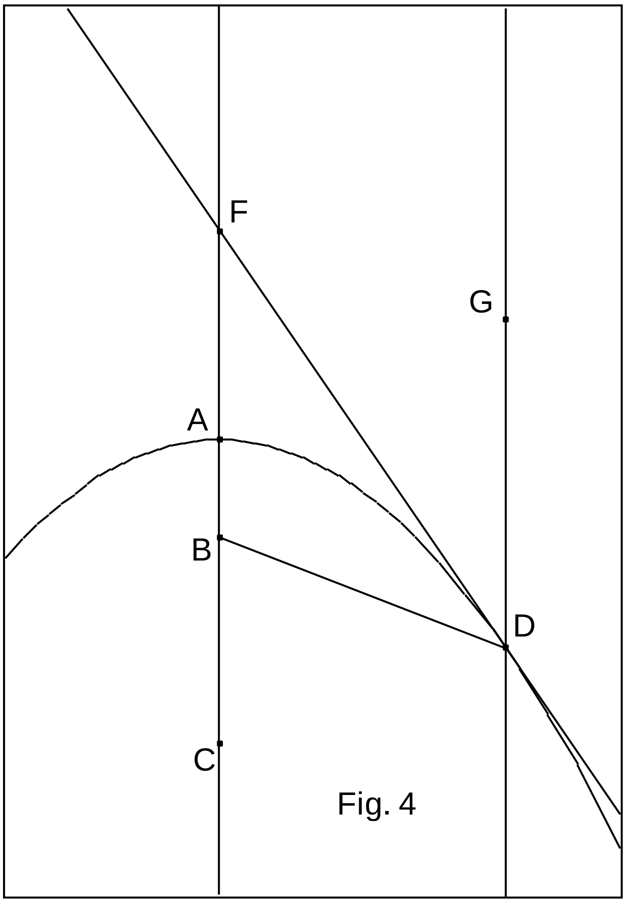


Fig. 4

Da quanto si è detto segue che si può facilmente tracciare una linea retta tangente alla parabola in un suo punto qualsiasi. Se ad esempio D (appartenente alla parabola) è il punto di tangenza prescelto, si tracci anzitutto la retta DG parallela all'asse AC e passante per D (cfr. Fig. 4), poi si congiungano con un'altra retta i punti B e D: la bisettrice DF dell'angolo BDG è tangente alla parabola in D, come era richiesto.

Cap. XIV
Come descrivere una parabola nel piano, dati fuoco e vertice.

Siano dati in un piano qualunque i punti B (fuoco della parabola) ed A (vertice). Per descrivere la parabola, si congiungano A e B, prolungando AB fino ad E di un tratto uguale ad AB; si tracci EG, perpendicolare ad AB passante per E; si fissi un perno in B, e a B si leghi uno dei capi di un filo IDB, avente l'altro capo I saldato all'estremità di un regolo IG che abbia lunghezza uguale a quella del filo e sia perpendicolare ad EG (cfr. Fig. 5). (Occorre che tale lunghezza sia maggiore di EB). Si appoggi poi alla retta EG un'asta rettilinea indefinitamente estesa da una parte e dell'altra di E (anche quest'asta sarà indicata in seguito con EG).

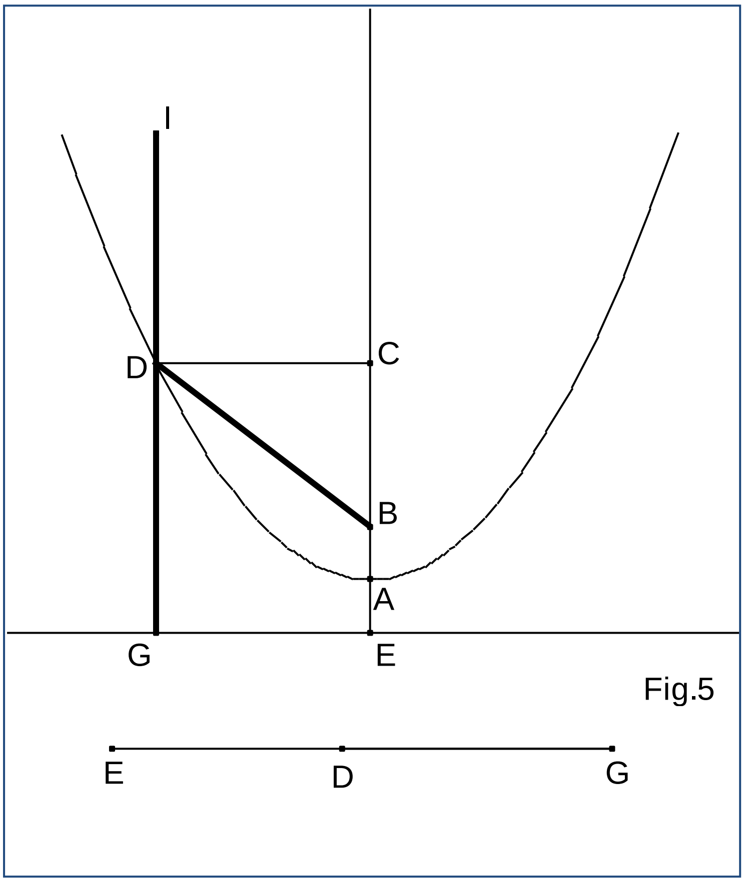


Fig.5

Ciò fatto, si sposti il regolo IG verso E mantenendolo sempre a contatto con l'asta EG e a questa perpendicolare: contemporaneamente, si tenga il filo teso con uno stilo in modo che la sua parte ID sia esattamente sovrapposta al bordo del regolo IG, mentre lo stilo si muove verso A.

Allora lo stilo descriverà nel piano un arco di parabola: con lo stesso metodo potrà essere tracciato l'arco simmetrico rispetto ad AB.

La dimostrazione si basa ancora sul Lemma dimostrato nel Cap. XII.

Infatti, poiché la lunghezza del filo è uguale a quella di IG, togliendo a entrambi la parte comune ID si avrà (cfr. Fig. 5) GD = DB, e quindi
GD = EC. Ciò è vero qualunque sia D, che perciò appartiene a una parabola.
Se si vogliono allungare gli archi tracciati, basterà allungare sia il filo che il regolo IG.