

Prima serie
Sezioni piane del cono

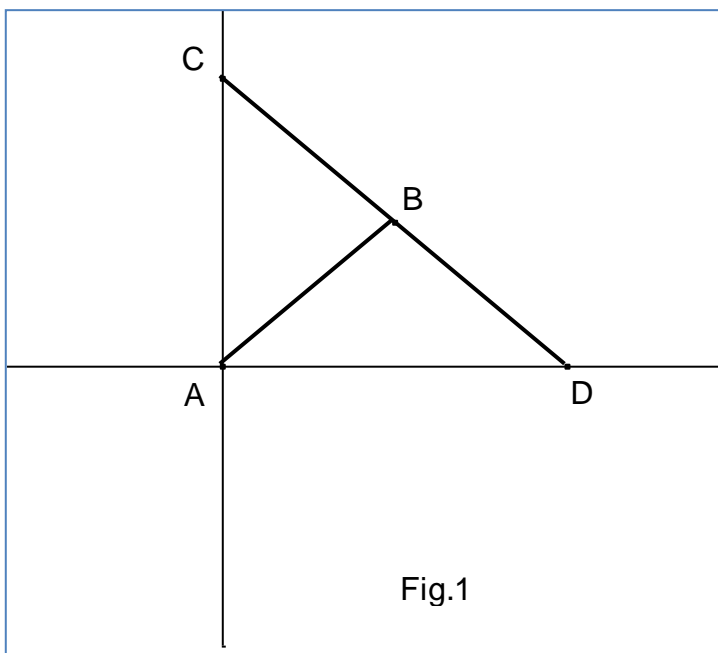
Fascicolo N°14

F. Van Schooten

**EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM LIBER IV, SIVE DE
ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE
TRACTATUS. (ED. 1657). (CAP. I, II, III).**

CAP. I

Sulle linee rette tracciate nel piano da un movimento pilotato.



In un piano qualunque sia data un'asta (rigida, rettilinea) AB mobile attorno al punto A, e una seconda asta CBD (rigida, rettilinea) collegata alla prima in B in modo che possa ruotare attorno a questo punto mantenendosi nello stesso piano di AB: supponiamo inoltre che le distanze AB, CB, BD siano fra loro uguali. (Cfr. Fig.1)

Dico che allora, mentre il punto D scorre lungo una retta passante per A (ad esempio la retta AD della Fig. 1), il punto C sarà

costretto a descrivere (sempre sul medesimo piano) una retta passante per A perpendicolare ad AD). (Cfr. [animazione Fig.1](#)).

Per dimostrarlo, si tracci (cfr. sempre Fig.1) una retta AC passante per A. Poiché nel triangolo ABD i lati AB e BD sono uguali, sono in esso uguali anche gli angoli BAD, BDA. Per la stessa ragione (AB = BC) nel triangolo ABC sono uguali gli angoli ACB, BAC. Dunque: angolo CAD = angolo BCA + angolo ADB. Ma la somma dei tre angoli CAD, BCA, ADB è uguale a due angoli retti; perciò CAD deve essere un angolo retto. Si può facilmente verificare che, cambiando la posizione del punto D sulla retta AD, cambia contemporaneamente anche la posizione di C sulla retta AC; inoltre, in ogni configurazione dello strumento è possibile ripetere la precedente dimostrazione.

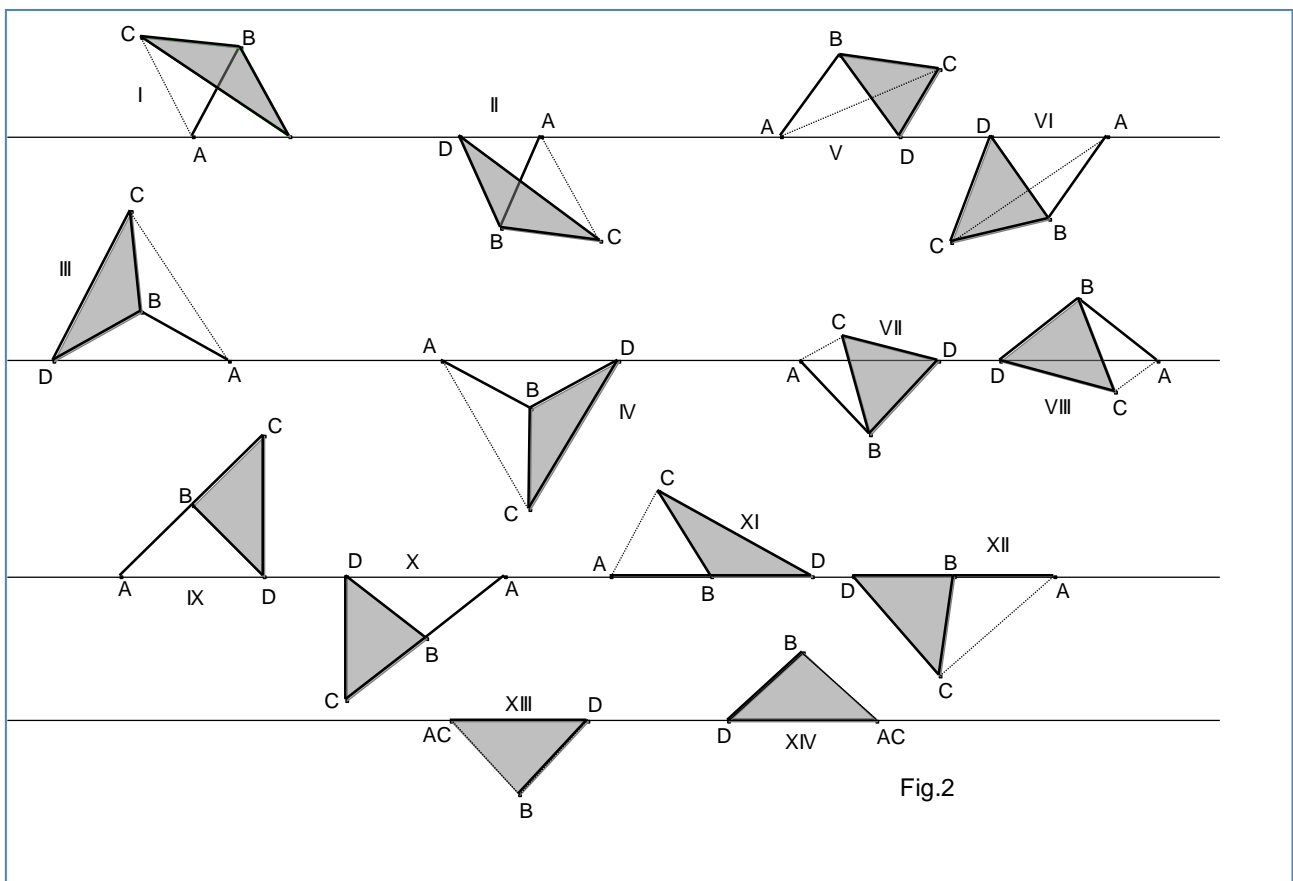
Segue che se dalle infinite diverse posizioni assunte da C tracciamo rette che lo congiungono ad A, queste rette formeranno con AD angoli retti, che sono tutti uguali fra loro.

Possiamo quindi dire che le rette CA formano con AD il medesimo angolo, e coincidono con la perpendicolare ad AD (unica).

In altri termini: mentre il punto D percorre la retta AD, il punto C si muove (sul medesimo piano) tracciando la retta CA perpendicolare alla AD in A.

Ciò appunto si voleva dimostrare.

Supponiamo ora che l'asta AB, mobile attorno ad A, non sia più connessa in B con un'altra asta CBD, bensì con un triangolo CBD avente entrambi i lati CB, BD uguali ad AB; supponiamo inoltre che B sia un vertice di tale triangolo, e che questo possa ruotare attorno a B (mantenendosi nello stesso piano di AB, senza che il suo angolo CBD subisca variazioni). (Cfr. Fig. 2).



Se tali ipotesi sono verificate, io dico che quando D scorre lungo la retta AD, il punto C si muove (nel piano individuato dal punto A e dai vertici del triangolo) lungo una linea retta formante con AD angoli obliqui, tra i quali quello acuto è la metà dell'angolo DBC compreso entro i lati uguali (DB, BC) del triangolo. (Cfr. [animazione Fig.2](#))

Per dimostrarlo, si osservi intanto che il punto D nel suo movimento può trovarsi a destra o a sinistra di A; di conseguenza anche il punto C muterà la sua posizione. Ciò

dà origine a diverse configurazioni dello strumento (i vari casi sono rappresentati in Fig. 2) che dovranno essere prese tutte in considerazione per ottenere una dimostrazione generale.

Supponiamo per ora che lo strumento si trovi in una qualsiasi delle sue possibili configurazioni; congiungiamo con una linea retta CA i punti C ed A. Poiché i lati AB, BD del triangolo ABD sono uguali, saranno uguali anche i suoi angoli DAB, BDA. Per la stessa ragione, essendo uguali i lati AB, BC del triangolo ABC, saranno uguali anche i suoi angoli CAB, BCA. Di conseguenza:

- a) l'angolo CAD è la somma dei due angoli BDA e ACB ($BDA+ACB$) nei casi I, II, III, IV della Fig. 2;
- b) l'angolo CAD è la differenza dei due angoli BDA e ACB ($BDA-ACB$) nei casi V e VI della Fig. 2;
- c) l'angolo CAD è la differenza dei due angoli ACB e BDA ($ACB-BDA$) nei casi VII e VIII della Fig. 2.

Prendiamo anzitutto in esame i casi I, II di Fig. 2. Indichiamo con α e β gli angoli (supplementari) formati dalle rette AC e AD; sia α l'angolo acuto. Risulta dunque: $\alpha = 180^\circ - \beta$ (*). Ma per ciò che si è detto in a) la somma degli angoli interni al quadrilatero ACBD si può scrivere: $CBD + 2\beta = 360^\circ$. Risulta dunque $CBD = 360 - 2\beta$ (**). Confrontando (*) e (**) si ha: $CBD = 2\alpha$.

Passiamo ai casi III e IV di Fig.2. Indichiamo con α l'angolo acuto CAD. Per ciò che si è detto in a) la somma degli angoli interni del triangolo ACD si può scrivere $2\alpha + BCD + CDB = 180^\circ$. (*)
Ma è anche $CBD + BCD + CDB = 180^\circ$ (**) (somma degli angoli interni del triangolo BCD). Confrontando (*) e (**) si ricava $CBD = 2\alpha$.

Consideriamo ora i casi V e VI di Fig. 2. Indichiamo con α l'angolo acuto CAD. Per ciò che si è detto in b) la somma degli angoli interni del triangolo ACD si può scrivere $DCB + 2\alpha + BDC = 180^\circ$ (*). La somma degli angoli interni al triangolo BCD è invece:
 $DCB + CBD + BDC = 180^\circ$. Confrontando (*) e (**) si deduce subito $CBD = 2\alpha$.

Infine, nei casi VII e VIII di Fig. 2, dopo avere ancora indicato con α l'angolo acuto CAD, scriviamo la somma degli angoli interni del triangolo ACD e quella degli angoli interni del triangolo CBD.
Si ottiene rispettivamente: $BCA + BCD + BCA - ADB + CDB - ADB =$

$= \angle BCD + \angle CDB + 2(\angle BCA - \angle ADB) = \angle BCD + \angle CDB + 2\alpha = 180^\circ (*)$;
 $\angle CDB + \angle CBD + \angle BCD = 180^\circ (**)$: confrontando (*) e (**) si ha ancora
 $\angle CBD = 2\alpha$.

Si può anche immaginare una configurazione dello strumento in cui AB e BC (come nei casi IX e X di Fig.2) oppure AB e BD (come nei casi XI e XII della stessa figura) si trovano sulla medesima retta. Accade ancora che l'angolo DBC sia il doppio dell'angolo CAD. Infatti nei casi IX e X l'angolo esterno DBC del triangolo ABD è la somma degli angoli interni non adiacenti (e uguali fra loro) DAB, BDA. Poiché $\angle DAB = \angle CAD$ segue l'assunto. Similmente, nei casi XI e XII l'angolo esterno DBC del triangolo ABC è la somma degli angoli interni non adiacenti (e uguali fra loro) CAB, BCA (si noti che $\angle CAB = \angle CAD$).

Nulla dico sulle configurazioni rappresentate nei casi XIII e XIV di Fig. 2, dove AB e BC coincidono: è chiaro infatti che se ciò accade i punti A e C coincidono.

Abbiamo così provato che qualunque sia la configurazione dello strumento, quando il punto D si muove sulla retta AD il punto C assume una posizione tale che, condotta una retta congiungente C con A, questa retta forma sempre con AD (sopra o sotto AD) angoli acuti che sono metà dell'angolo (scelto dal costruttore) CBD. Tali angoli, uguali fra loro, hanno due lati che passano per il vertice A e si trovano sulla medesima retta AD: anche gli altri due lati devono quindi essere allineati. Il punto C si troverà sempre su di essi: è quindi necessario che nel suo movimento, prodotto dal moto del punto D, esso descriva nel piano una linea retta. Ciò appunto volevamo dimostrare.

Si potrebbe arrivare più rapidamente alle medesime conclusioni osservando che nella circonferenza di centro B e raggio BA (la quale, per le ipotesi fatte, passa anche per C e D) gli angoli CBD e CAD sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza corrispondenti. Da ciò segue l'assunto.

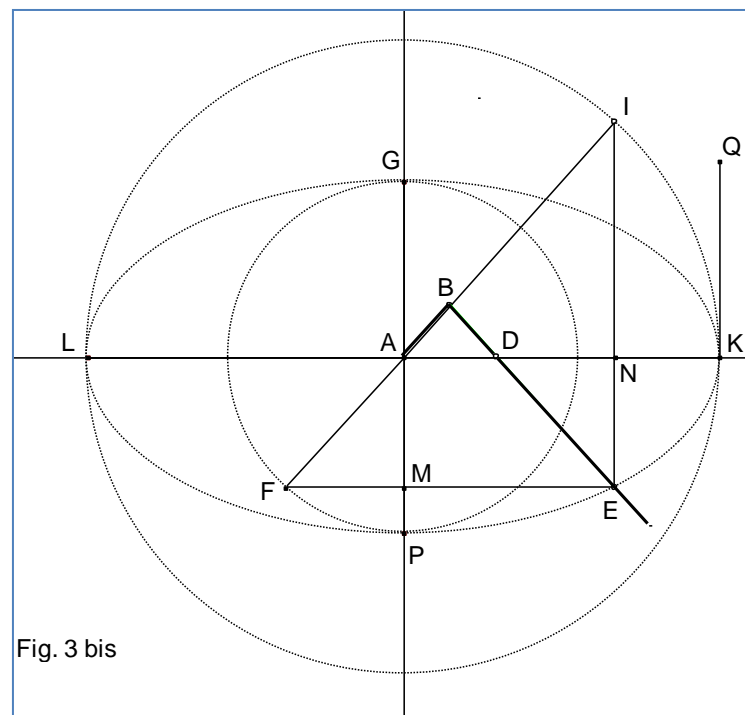
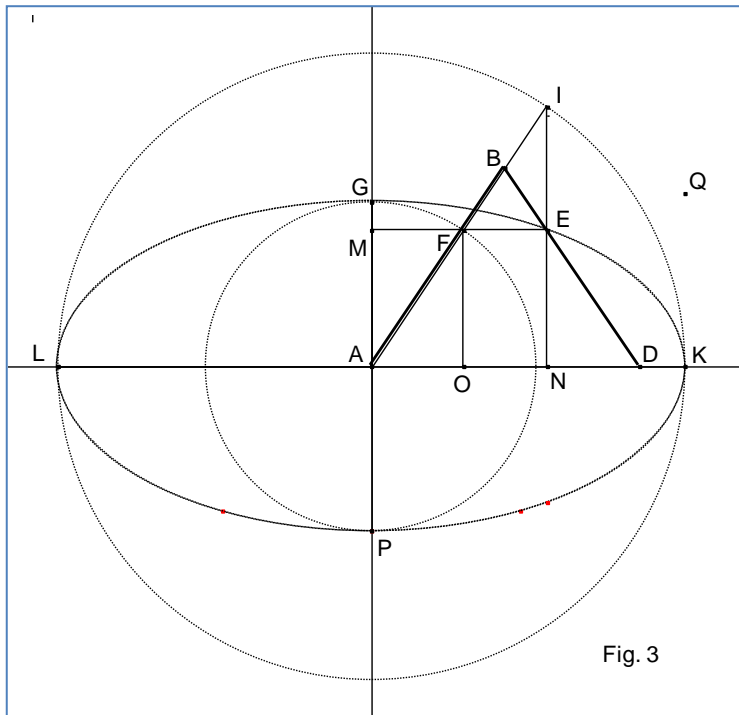
Tuttavia, in questo modo vengono nascoste sia la diversità delle configurazioni che lo strumento può assumere, sia le variazioni che tali configurazioni subiscono durante il moto. La scelta di Van Schooten (e le sue figure) aderiscono invece perfettamente alla realtà fisica del meccanismo studiato.

Si noti infine (Van Schooten stesso lo osserva alla fine del cap. I) che nella costruzione dello strumento il triangolo BCD può essere collocato indifferentemente dall'una o dall'altra parte della retta BC. Il punto C occuperà allora la posizione del punto D, e viceversa.

CAP II.

Sulle ellissi tracciate nel piano, attorno ai propri assi, da un movimento pilotato.

Torniamo al primo strumento descritto nel Cap. I. Consideriamo quindi in un piano qualsiasi un'asta AB (rigida, rettilinea) mobile attorno al punto fisso A, alla quale sia collegata in B un'altra asta BD (rigida, rettilinea), che possa ruotare attorno a B mantenendosi nel medesimo piano di AB. (cfr. Fig. 3 e 3 bis). Si prenda su BD un



qualsiasi punto E che sia compreso tra B e D oppure giaccia sul prolungamento di BD. Supponiamo $BD = AB$.

Io dico che se facciamo scorrere il punto D lungo una retta AD (cfr. sempre Fig.3 e 3 bis) allora il punto E (trascinato da questo moto) percorrerà nel piano il contorno di una ellisse avente centro in A, asse trasverso di lunghezza uguale a $2(AB+BE)$, asse retto uguale a $2DE$.

(Cfr. [animazione Fig. 3](#)).

Poiché AB ruota attorno ad A, un punto qualsiasi preso su AB o sul suo prolungamento descriverà una circonferenza. Si collochi allora su AB un punto F in modo che $BF=BE$; tale punto descriverà la circonferenza FGP, intersecata da una retta passante per A e perpendicolare ad AD nei punti G e P: GP sarà uguale a quello che abbiamo chiamato asse retto della ellisse. Infatti essendo $BF=BE$ e inoltre $AB=BD$, sono anche uguali BF e BE (loro differenza): quindi $GP=2DE$.

Si prolunghi ora AB fino ad I, in modo che $BI=BE$. Il punto I descriverà una circonferenza LK di centro A e raggio AI, intersecata dalla retta AD nei punti L e K: LK sarà uguale a quello che abbiamo chiamato asse trasverso della ellisse. Essendo infatti $AI=AB+BE$, LK risulta uguale a $2(AB+BE)$.

Possiamo ora dimostrare che il punto E descrive una ellisse avente come assi proprio LK e GP.

Congiungiamo i punti E ed F, prolungando EF fino ad incontrare AG in M: sarà allora EF parallela ad AD e perpendicolare ad AG. Si congiungano poi i punti I ed E, prolungando IE fino ad incontrare AD in N: anche IE sarà perpendicolare ad AD. Infine, si tracci FO (parallela a IE) che incontra AD in O, e si determini la terza proporzionale KQ rispetto agli assi LK, GP.

Dalla similitudine dei triangoli AFO, AIN si ricava $FO:FA=NI:IA$; permutando: $FO:NI=FA:IA$; quindi anche $FO:NI=2FA:2IA$, da cui (essendo, come mostrato in precedenza, $2FA=GP$, $2IA=LK$) $FO:NI=GP:LK$. Dall'ultima proporzione si ricava:

$FO^2:NI^2 == GP^2:LK^2$; da questa (tenendo conto che è per ipotesi $GP^2 = LK \times KQ$,

quindi $GP^2:LK^2 = KQ:LK$) si deduce infine $FO^2:NI^2 = KQ:LK$, o anche $NE^2:NI^2 = KQ:LK$ (è infatti $FO=NE$). Ma per un noto teorema di Euclide sappiamo che $NI^2 = LN \times NK$. Concludendo: il quadrato di NE sta al rettangolo LNK come $KQ:LK$. E' quindi vero (si ricordi la proprietà enunciata da Apollonio) che il punto E giace su una ellisse, avente come assi LK e PG, e KQ come lato retto principale (relativo all'asse LK).

Il ragionamento si può ripetere identico per tutte le infinite altre rette NE che vengono ordinatamente applicate all'asse LK mutando la configurazione dello strumento: segue quindi che nel suo moto il punto E descrive l'ellisse avente come diametri KL e GP. Ciò appunto si voleva dimostrare.

Ciò che abbiamo detto sul punto E, quando lo si colloca su BD fra i punti B e D oppure sul prolungamento di BD al di là del punto D, vale anche se lo si colloca sul prolungamento di BD al di là del punto B, purché BE non sia uguale ad AB.

Ricordiamo ciò che abbiamo dimostrato nel CAP. I (a proposito dello strumento costituito dalle aste mobili AB, DBC, rappresentato in Fig. 1): quando il punto D scorre sulla retta AD, il punto C è costretto a tracciare una retta perpendicolare ad AD (se $BE=AB$, il punto E coincide con C).

E' facile capire che se, nello strumento di Fig.1 del CAP. I, collochiamo un punto sulla retta BD compreso tra B e C, oppure sul prolungamento di BD oltre C, vale per tale punto (se pensiamo che C scorra sulla retta AC) il medesimo ragionamento che abbiamo svolto in questo capitolo a proposito del punto E.

Infatti in tal caso la configurazione realizzata (rispetto alla retta AC) da un punto E insieme alle aste AB, BC (essendo E collocato tra B e C oppure sul prolungamento della retta BC oltre C), è esattamente uguale a quella realizzata (rispetto alla retta AD) da un punto E insieme alle aste AB, BD (essendo E collocato tra B e D oppure sul prolungamento della retta BD oltre D): quest'ultima configurazione è proprio quella da noi già studiata. Perciò non servono ulteriori dimostrazioni: basta, in quella già esposta, indicare con C il punto prima chiamato D, e viceversa.

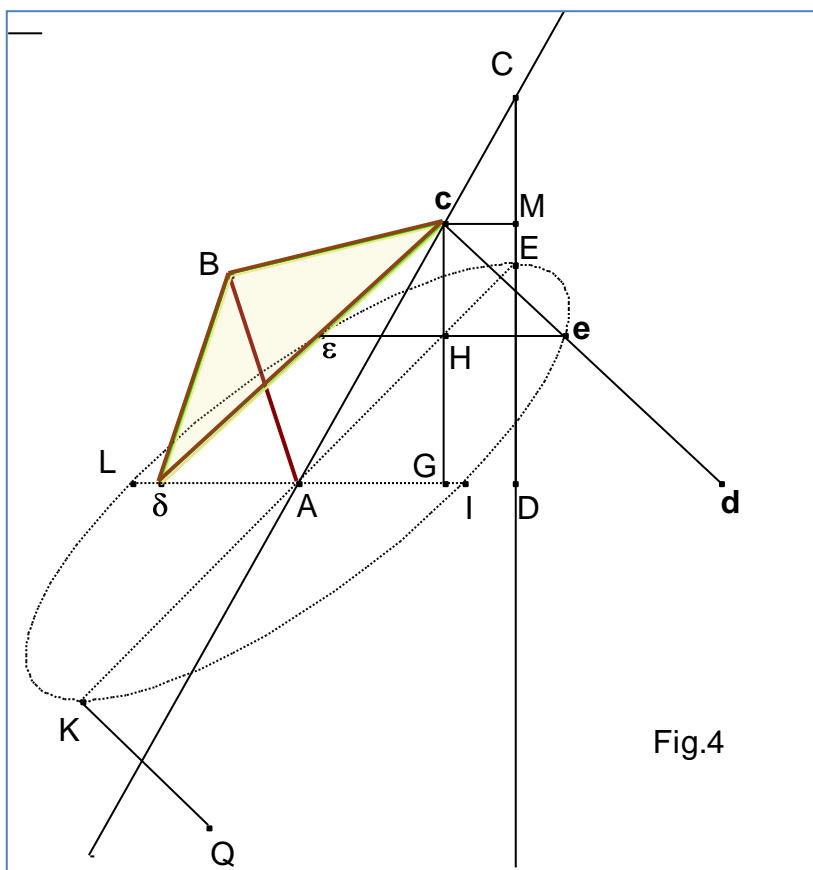
Avvertiamo infine che muovendo il punto D lungo la retta AD si può descrivere non soltanto una semiellisse, ma anche l'ellisse intera, purché le aste AB, BD siano guidate dalla parte opposta della retta AD.

Nello *scholium* aggiunto al Cap. II, Van Schooten confronta la superficie della ellisse tracciata e quelle dei cerchi di raggio AF e AI (cfr. Fig. 2) utilizzando gli indivisibili del Cavalieri. Analogo confronto è svolto prendendo in considerazione opportuni segmenti ellittici e circolari.

CAP. III.

Sulle ellissi tracciate nel piano, da un movimento pilotato, attorno a due qualsiasi diametri coniugati.

Riprendiamo ora in esame lo strumento del quale ci siamo occupati nel cap.I (fig.2). Si consideri cioè nel piano una asta (rigida, rettilinea) AB mobile in un piano qualsiasi attorno al punto A, collegata in B ad un triangolo δBc avente i lati δB e Bc uguali ad AB; il triangolo si muova nel medesimo piano dell'asta AB, ruotando attorno a B. Come sappiamo, quando al punto δ si fa percorrere una linea retta AD (giacente nel piano del triangolo e dell'asta AB) il punto c si sposta (nel medesimo piano) lungo



una retta AC che forma con AD due angoli obliqui: tra questi, l'angolo acuto CAD è la metà dell'angolo compreso tra i lati uguali δB e Bc del triangolo δBc . (Cfr. Fig. 4)

Considero ora un punto qualsiasi ϵ interno al lato δc . Io dico che durante il movimento dei punti c e δ , il punto ϵ descrive il contorno di una ellisse di centro A e diametro $LI=2c\epsilon$. (Cfr. [animazione Fig. 4](#)).

Indichiamo con EK il diametro coniugato a LI. Per determinare EK procediamo come segue: sistemiamo il

lato $c\delta$ del triangolo compreso fra le rette AC e CD in modo che sia perpendicolare ad AD; la sua posizione sarà allora CD (cfr. Fig. 4); chiamiamo E la posizione di ε su CD. Fatto questo, congiungendo E con A e prendendo sulla retta EA (dalla parte opposta di E rispetto ad A) un punto K tale che $AK=EA$, troveremo il diametro EK coniugato a LI.

Tracciamo la retta cG uscente da c e perpendicolare ad AD; supponiamo che il lato $c\delta$ del triangolo sia nella posizione cd indicata in Fig. 4 (ciò è possibile, come si può vedere nel cap. I, Fig. 2, caso I): il punto ε del lato $c\delta$ avrà allora la posizione e .

Congiungiamo ε ed e : la retta $e\varepsilon$ intersechi cG in H. Prolunghiamo poi CD fino ad N in modo che sia $DN=CD$, e su DC prendiamo $DM=cG$. Infine, determiniamo KQ, terza proporzionale fra EK, LI.

Poiché (come abbiamo dimostrato) il punto c appartiene sempre alla retta AC, è chiaro che quando esso si troverà ad avere la massima distanza da A, dovrà coincidere col punto C: in questo caso il punto E sarà un vertice della ellisse.

Osserviamo inoltre che cd (uguale a CD) sta a cG come ce (uguale a CE) sta a cH (triangoli simili cGd e cHe), e che le rette CD, cG sono parallele: quindi i punti E, H, A sono allineati. (cfr. sempre Fig. 4). Pertanto il punto H, intersezione delle perpendicolari cG ed $e\varepsilon$, è anche punto di intersezione tra EAK, $e\varepsilon$. Ma poiché la retta $e\varepsilon$ è divisa in due parti uguali dalla retta cG nel punto H, possiamo concludere che anche la retta EAK la divide col punto H in due parti uguali, perciò EAK è un diametro a cui sono ordinatamente applicate le $e\varepsilon$.

Sarà anche $CE : cH = AE : AH$; inoltre $CE : cH = CD : cG$; di conseguenza $CD : cG = AE : AH$; da quest'ultima (scomponendo)

$$CD : CM = AE : HE. (*)$$

Ma dalla proporzione $CD : cG = AE : AH$ si ricava anche (invertendo i rapporti e componendo): $CD : MN = AE : KH. (**)$

Moltiplicando membro a membro le (*) e (**), si ottiene anche:

$$CD^2 : (CM \times MN) = AE^2 : (EH \times HK). (§)$$

Sappiamo già (cfr. sopra, dove si citano i triangoli simili cGd e cHe) che

$$CD : cG = ce : cH, \text{ ossia che } (cG = DM, \text{ cfr. Fig. 4}): CD : DM = ce : cH.$$

Da quest'ultima si deduce subito $CD^2 : DM^2 = ce^2 : cH^2$, e quindi (scomponendo) $CD^2 : (CD^2 - DM^2) = ce^2 : (ce^2 - cH^2)$, la quale si può scrivere, ricordando che $CD^2 - DM^2 = (CD + DM) \times (CD - DM)$: $CD^2 : (CM \times MN) = ce^2 : He^2. (§§)$ (controllare sempre su Fig. 4):

Confrontando (§) e (§§), si ottiene allora: $ce^2 : cH^2 = AE^2 : (EH \times HK)$.

Permutando i medi: $ce^2 : AE^2 = cH^2 : (EH \times HK)$. Essendo $ce = AI$ ricaviamo: $AI^2 : AE^2 = cH^2 : (EH \times HK). (§§§)$

Osserviamo ora che per costruzione KQ è terza proporzionale dopo EK ed LI: si ha dunque $LI^2 = EK \times KQ$; ne consegue

$KQ:KE=LI^2 :KE^2 =AI^2:AE^2$. (Ricordare che $AI = LI / 2$, $AE = KE/2$).

Concludendo (cfr. la proporzione (§§§)): $cH^2:(EH \times HK) = KQ:KE$, dove KQ è il lato retto della figura e KE il lato trasverso. E' dunque lecito affermare che il punto ε si trova sul contorno di una ellisse avente KE ed LI come diametri coniugati e KQ come lato retto relativo al diametro KE.

Siccome la medesima dimostrazione si può ripetere (identica) infinite volte con riferimento a qualunque altra retta $H\varepsilon$ ordinatamente applicata al diametro KE e a qualunque altra configurazione dello strumento descritto, possiamo affermare che il punto ε (pilotato da tale strumento) descrive nel piano una ellisse attorno ai diametri KE, LI.

Ciò appunto si voleva dimostrare.

*Nello **scholium** aggiunto al Cap. III Van Schooten riprende le osservazioni fatte (utilizzando il principio del Cavalieri) in quello relativo al Cap. II sulle superfici delle ellissi e dei segmenti ellittici, svolgendole però non solo con riferimento agli assi della conica, ma a due qualsiasi diametri coniugati. Una delle conclusioni raggiunte è che, dato un generico segmento ellittico, esiste sempre un segmento circolare ad esso equivalente.*

*Nelle pagine del Cap. III successive allo **scholium** Van Schooten poi dimostra che lo strumento considerato in Fig. 4 traccia ellissi anche se il punto ε viene scelto con modalità diverse da quelle precedentemente indicate. Ad esempio: sul lato BC o su un suo prolungamento; oppure su un prolungamento del lato BD; oppure se è vertice di un qualsiasi triangolo $BD\varepsilon$ applicato da una parte o dall'altra del segmento $DB=AB$. (Cfr. Fig. 5 animazione). Ciò significa che un generico punto di un piano solidale all'asta BD descrive una ellisse quando D si muove lungo la retta AD.*

Infine (Cap. IV e V) Van Schooten insegna come costruire (in legno, metallo o altra materia solida) gli strumenti precedentemente studiati e come usarli per tracciare ellissi di cui si conoscano gli estremi degli assi o gli estremi di due diametri coniugati. Citando Descartes, accenna anche a un celebre strumento a filo, che utilizza i fuochi della conica.