Prima serie

Sezioni piane del cono

FASCICOLO 13

JOHANNES WALLIS: "DE SECTIONIBUS CONICIS NOVA METHODO EXPOSITIS TRACTATUS" (1655)

*La prima parte del trattato è dedicata alla deduzione dei sintomi che caratterizzano parabola, ellisse ed iperbole definite come sezioni di un cono. Nella seconda parte ognuna delle tre curve è invece "**absolute considerata**": studiata cioè nel piano (a partire dai sintomi precedentemente determinati) prescindendo completamente dalla sua genesi spaziale. Traduciamo qui alcune pagine della prima parte, nella quale Wallis impiega il **metodo degli indivisibili** di Bonaventura Cavalieri. Prima di prendere in esame i coni, egli premette alcune proposizioni (si tratta delle prop. I, II, III e IV) sulle figure piane.*

Le illustrazioni (Figg. 1 – 9) sono ricopiate da quelle del testo originale. Servono come aiuto per rappresentarsi la situazione spaziale, ma non rispettano le regole della prospettiva.

Prop. I.

Supponiamo anzitutto (seguendo la "Geometria degli indivisibili" di B. Cavalieri) che qualsiasi figura piana sia, per dir così, formata da infinite rette fra loro parallele; o piuttosto (come io preferisco) da infiniti parallelogrammi con la medesima altezza, che sia $\frac{1}{\infty}$ (parte aliquota infinitamente piccola) dell'altezza totale della figura considerata: quindi l'altezza di tutti i parallelogrammi simultaneamente considerati sarà esattamente uguale all'altezza della figura. (Il simbolo ∞ indica un numero infinitamente grande). Cfr. Fig. 1.

*Si ricordi che il termine "**retta**" indica, per gli autori del '600,(salvo avviso contrario) ciò che noi ora chiamiamo "**segmento di retta**".*
Wallis è stato uno dei primi a usare il simbolo ∞.

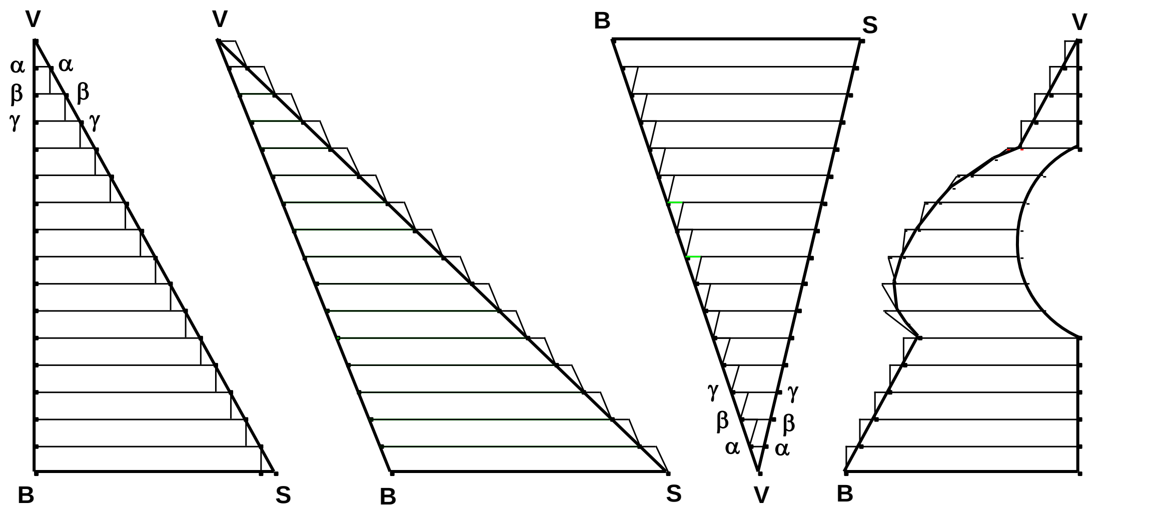

Fig. 1

Prop. II.
Se un triangolo è intersecato con una retta parallela alla base, il triangolo tagliato via dalla retta è simile al triangolo iniziale: avrà quindi, come è noto, lati proporzionali a quelli del triangolo intersecato.
Dunque, se un qualsiasi triangolo VBS è intersecato da rette $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, ecc. tutte parallele alla base BS e fra loro equidistanti – le quali perciò dividano entrambi i lati del triangolo stesso in parti uguali (e quindi anche tutto il triangolo in parti di uguale altezza) – tali rette $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, ecc. saranno in proporzione aritmetica: (infatti le $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, ecc. stanno fra loro come Vα, Vβ, Vγ, ecc. cioè – in quanto queste ultime si ottengono l'una dall'altra aggiungendo le parti uguali Vα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ecc. – come 1, 2, 3, ecc.). Segue da ciò che se le rette intersecanti si suppongono in numero infinito, la loro totalità (cioè, per la proposizione precedente, l'intero triangolo) sarà un aggregato di infinite rette in proporzione aritmetica, tra cui minima risulterà V (vertice del triangolo) e massima BS (base del triangolo).
Se poi supponiamo che quelle infinite rette siano base di altrettanti parallelogrammi ognuno dei quali abbia altezza uguale a $\frac{1}{\infty}$ dell'altezza del triangolo e giaccia nello stesso piano in cui il triangolo si trova: anche tali parallelogrammi saranno in proporzione aritmetica (poiché infatti hanno la medesima altezza, saranno proporzionali alle basi).

La figura costituita dalla totalità dei parallelogrammi introdotti alla fine della Prop. II può risultare sia inscrivibile sia circoscrivibile al triangolo; in ogni caso la parte in difetto o in eccesso rispetto al triangolo dovrà essere considerata infinitamente piccola, cioè nulla. Cfr. Fig. 1.

Prop. III. (Area del triangolo).
Poiché il triangolo si può considerare formato da infinite linee o da infiniti parallelogrammi in proporzione aritmetica (che procedono dal vertice alla base: cfr. proposizioni precedenti), segue che l'area del triangolo si ottiene moltiplicando la base per metà dell'altezza.
E' noto infatti dall'aritmetica che la somma di una progressione aritmetica si ottiene moltiplicando la somma degli estremi per la metà del numero dei termini.

Nel nostro caso, area triangolo: $\frac{\infty}{2}b \times \frac{1}{\infty}a = \frac{1}{2}ab$*, dove a è l'altezza del triangolo, b la base (coincidente con la somma degli estremi),* ∞ *il numero dei termini della progressione. (Cfr. Fig.1).*
Osserviamo che Wallis è uno dei primi ad introdurre il simbolo ∞*, e a trattarlo come un normale simbolo algebrico.*
Tutte le proposizioni precedenti valgono per ogni figura ottenuta dal triangolo traslando parallelamente alla base le parti in cui è suddiviso senza alterarne la lunghezza, mantenendole quindi in progressione aritmetica ("triangoli" deformati, distorti, lussati, curvilinei: vedi esempio in figura).

Prop. IV
Da ciò che precede si ricava che triangoli aventi basi uguali e altezze uguali hanno sempre la medesima area, qualunque sia la loro forma (rettangoli, isosceli, scaleni, curvilinei, o "lussati" in qualunque modo).

Prop. V.
(Sul cono). Se le infinite rette parallele da cui supponiamo costituito un triangolo sono diametri di altrettanti circoli paralleli fra loro, questi formano una figura solida che si chiama cono.

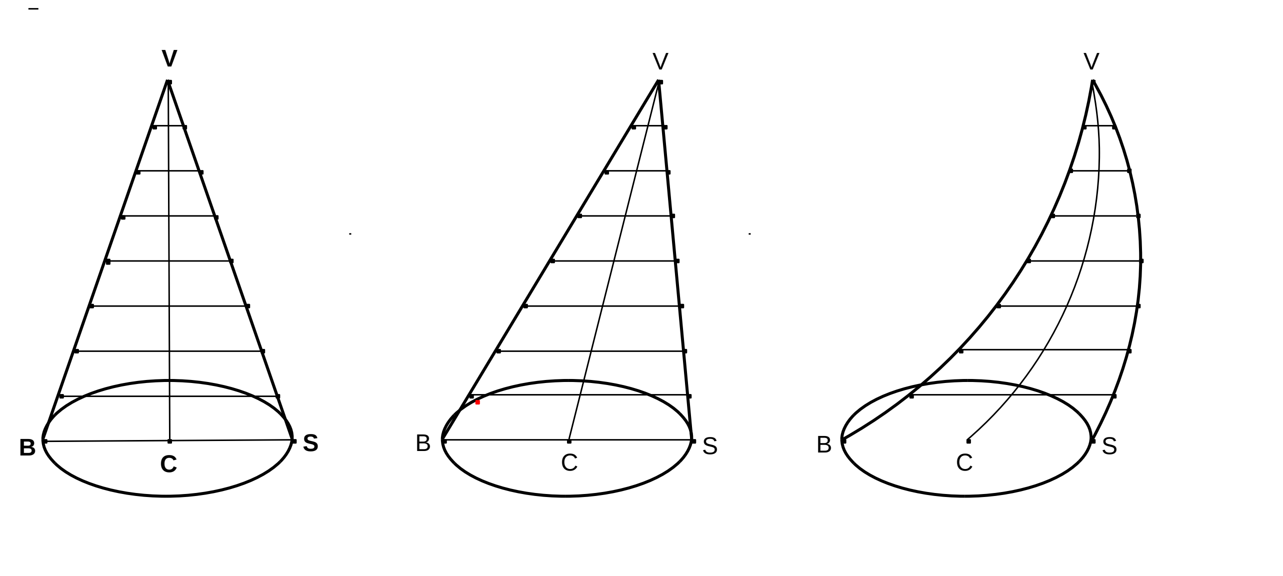

Fig. 2

La retta condotta dal vertice V del triangolo (che è anche Vertice del Cono) al punto medio della base (retta VC in Fig. 2, detta Asse del triangolo) biseca tutte le rette parallele alla base da cui il triangolo è formato, quindi il triangolo stesso; segue che passa per i centri di tutti i cerchi paralleli che formano il cono: sarà dunque anche Asse del cono.
Il triangolo VBS passante per l'asse del cono bisecherà allora sia il cono che i suoi circoli paralleli. Il cerchio che ha come diametro la base del triangolo è la base del cono.
Diremo che il cono così formato è un ***cono retto*** quando il triangolo VBS ha i lati uguali e contemporaneamente i piani dei circoli paralleli sono perpendicolari al piano del triangolo: in tal caso anche l'asse del cono sarà perpendicolare alla base, e lo chiameremo ***asse retto***.
Se invece l'una o l'altra di queste due condizioni non si verifica (cioè se il triangolo è scaleno oppure se i piani dei circoli incidono obliquamente sul piano del triangolo) si avrà un ***cono scaleno*** (cioè inclinato od obliquo: anche il suo asse incontrerà allora obliquamente la base, e sarà chiamato ***asse obliquo***).
Infine, se il triangolo sarà distorto avremo un ***cono distorto***: non sarà un vero cono (cfr. Fig. 2).

Siccome il triangolo può essere esteso all'infinito prolungando i suoi lati oltre la base, supporremo che anche il cono possa essere esteso indefinitamente in modo analogo. Inoltre, poiché prolungando i lati del triangolo al di sopra del vertice (dopo il loro incontro) si può formare un altro triangolo che chiameremo triangolo opposto, potremo prendere in considerazione anche il ***cono opposto*** rispetto a quello assegnato.

A questo punto Wallis osserva che i coni definiti nella Prop. V coincidono perfettamente (escludendo quelli distorti) con i coni definiti nel trattato di Apollonio. Quindi il vertice del cono può essere congiunto con un punto qualsiasi della superficie conica mediante una retta giacente interamente sulla superficie stessa. La Prop. VI è dedicata alla definizione delle ***piramidi*** *(su cui non insistiamo: osserviamo soltanto che – nella terminologia di Wallis – i coni sono* ***piramidi rotonde****).*

Prop. VII. (Sulle sezioni del cono).

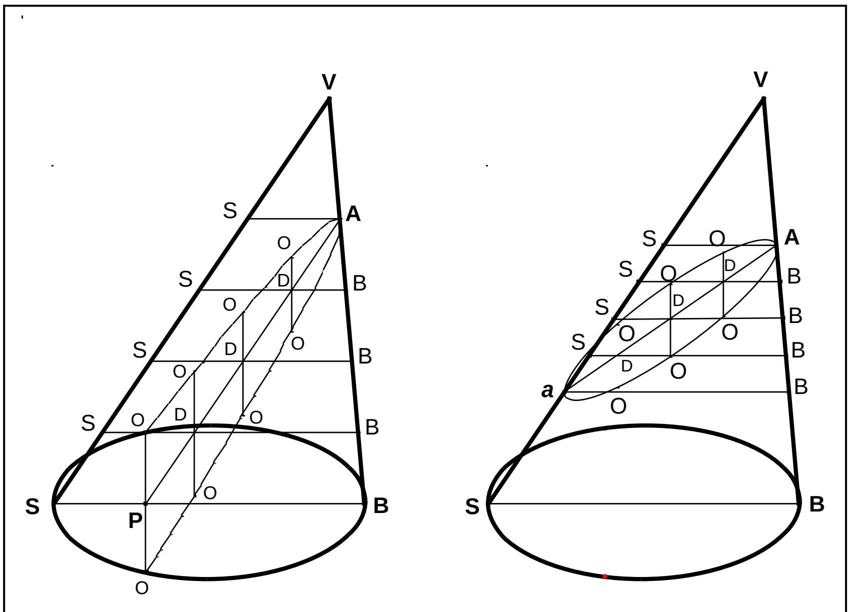

Fig. 3

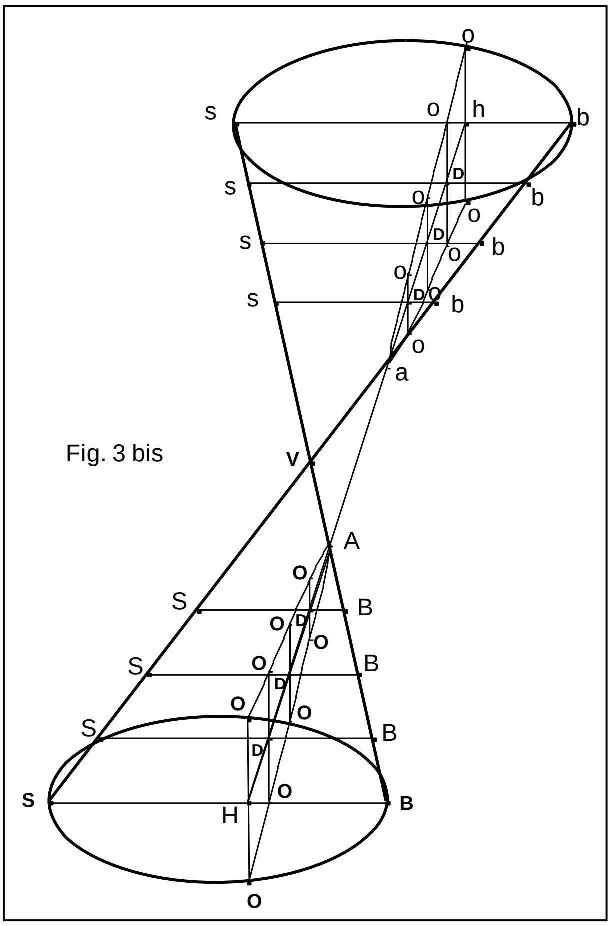

Fig. 3 bis

A partire da un qualsiasi punto A preso su uno dei lati del triangolo VBS (il quale contiene l'asse del cono ed è servito a generare il cono stesso) si tracci una retta che attraversi il triangolo VBS e lo divida in due parti (ad esempio – nelle Figg. 3 e 3 bis – la retta AP, oppure AE, oppure AH). Supponiamo poi che il piano del triangolo sia intersecato lungo questa retta AP da un altro piano la cui ulteriore intersezione OO con uno dei cerchi paralleli che formano il cono risulti perpendicolare al diametro BS (giacente sul triangolo) del cerchio considerato.
(Si può dimostrare che, cambiando la scelta del cerchio, tutte le rette OO così ottenute sono parallele fra loro e perpendicolari al diametro BS del cerchio al quale appartengono: cfr. sempre Figg. 3 e 3 bis).

L’intersezione tra il piano che interseca il triangolo VBS e la superficie del cono si chiama ***sezione conica*** (in figura, OAO).
Ce ne sono di tre tipi diversi: ***parabola, ellisse, iperbole***.
Si ha una ***parabola***, se la retta tracciata è parallela all’altro lato del triangolo (quindi, anche se prolungata indefinitamente, non lo incontra mai: cfr. AP in Fig. 3).
Si ha invece una ***ellisse***, se la retta tracciata si avvicina al lato opposto del triangolo (quindi, opportunamente prolungata, lo incontra al di sotto del vertice V, in un punto ***a***: cfr. AE***a*** in Fig. 3)
Si ha infine una ***iperbole***, se la retta tracciata si allontana dal lato opposto del triangolo (quindi, con opportuni prolungamenti, si ottiene un punto di incontro ***a*** al di sopra del vertice V: cfr. HA***a*** in Fig. 3 bis).
Nel caso della parabola (cfr. ancora Fig. 3): A è il ***vertice*** della sezione; nel caso di ellisse e iperbole: A ed ***a*** sono i ***vertici opposti***; le rette AP, AE, AH sono i ***diametri*** delle sezioni; nel caso della ellisse e della iperbole, le rette A***a*** sono i ***diametri trasversi.*** (Si noti che il medesimo piano che crea su un cono l’iperbole, attraversa anche il cono opposto, creando sulla sua superficie l’***iperbole opposta***).
Le rette come OO e le altre ad essa parallele appartenenti alla medesima sezione (e ai cerchi paralleli che formano il cono) saranno chiamate ***ordinatamente sottese***, oppure ***ordinatamente inscritte*** alla sezione. Tali rette, perpendicolari (come abbiamo postulato) ai diametri dei cerchi da cui il cono è costituito, sono da questi diametri bisecate: e le biseca dunque anche il diametro della sezione, che passa per i loro punti medi. Le loro metà (come DO: cfr Figg. 3 e 3 bis) si chiamano ***ordinatamente applicate*** al diametro della sezione conica, e sono medie proporzionali fra le due parti BD, DS che formano il diametro (ad esse perpendicolare) del cerchio cui appartengono.
Nel caso in cui anche il diametro della sezione sia perpendicolare alle rette OO, questo diametro si chiama ***asse*** (l’asse è dunque perpendicolare alle rette a lui ordinatamente applicate). Altrimenti, si usa dire che è un ***diametro obliquo*** o ***inclinato***.
Così come il cono, anche le sue sezioni (iperbole e parabola, poiché l’ellisse è una curva chiusa) si considerano indefinitamente prolungabili.
Con i termini ellisse, parabola, iperbole indicheremo anche le figure piane delimitate da tali curve: se è necessario distinguere, parleremo di ***piano parabolico, piano ellittico, piano iperbolico.***

Prop. VIII. (Sulla ***parabola***).

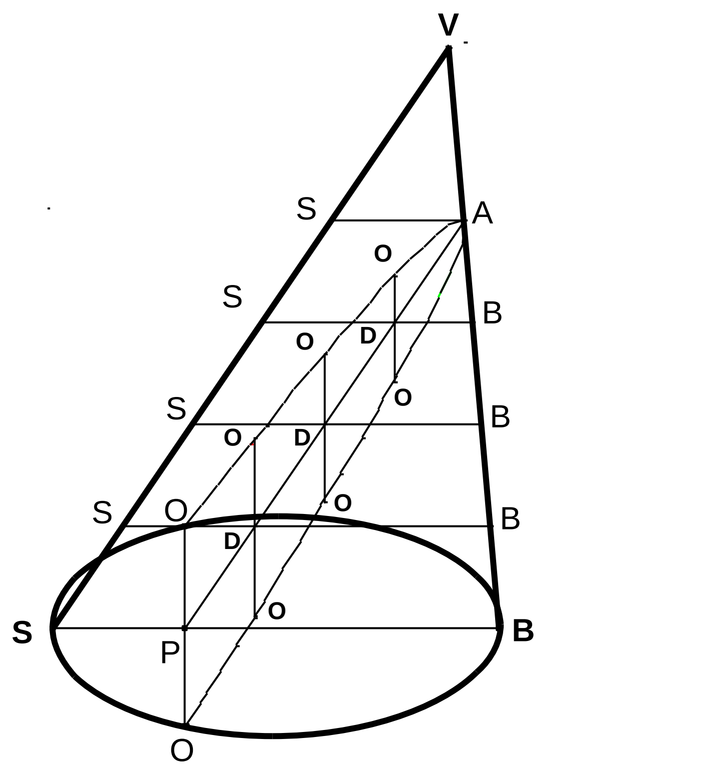

Fig. 4

Nella parabola, i quadrati delle rette ordinatamente applicate al diametro della curva sono proporzionali alle parti del diametro da esse intercettate. (Cfr. Fig. 4)
Infatti i quadrati di PO, DO ecc. (cioè delle rette ordinatamente applicate al diametro) sono proporzionali alle rette PB, DB ecc. (parallele fra loro nel triangolo APB) in quanto uguali ai rettangoli BP×PS, BD×DS ecc. che hanno la medesima altezza a causa della uguaglianza di PS, DS ecc. (si consideri il parallelogramma APSS) e quindi sono proporzionali alle basi PB, DB ecc. Ma le rette PB, DB ecc sono proporzionali (si consideri il triangolo APB) a PA, DA ecc., cioè alle parti del diametro intercettate dalle rette applicate (parti comprese tra il vertice A e i punti P, D ecc. di intersezione tra il diametro stesso e le applicate).
Se dunque si considera una serie di rette ordinatamente applicate fra loro equidistanti, i quadrati di tali rette saranno in progressione aritmetica. Possiamo dire allora che un piano semiparabolico è formato dai lati (in numero infinito) di quadrati in proporzione aritmetica.

Osserviamo che nella prop. VIII la proprietà caratteristica della parabola viene dedotta ***simultaneamente*** *(mediante l'uso del principio di Cavalieri) per la* ***totalità*** *dei punti che costituiscono la curva. Non è più necessario (come avveniva nelle dimostrazioni classiche) sottolineare la possibilità di* ***iterare*** *il ragionamento se cambia la scelta del punto preso in considerazione.*
Nelle proposizioni IX, X Wallis definisce (e studia brevemente) i conoidi parabolici, i piramidoidi parabolici e le loro sezioni. Nella proposizione XI viene definito il cuneo parabolico.

Prop. XII. (sul ***lato retto*** della ***parabola***; cfr. Fig. 4 e 5).

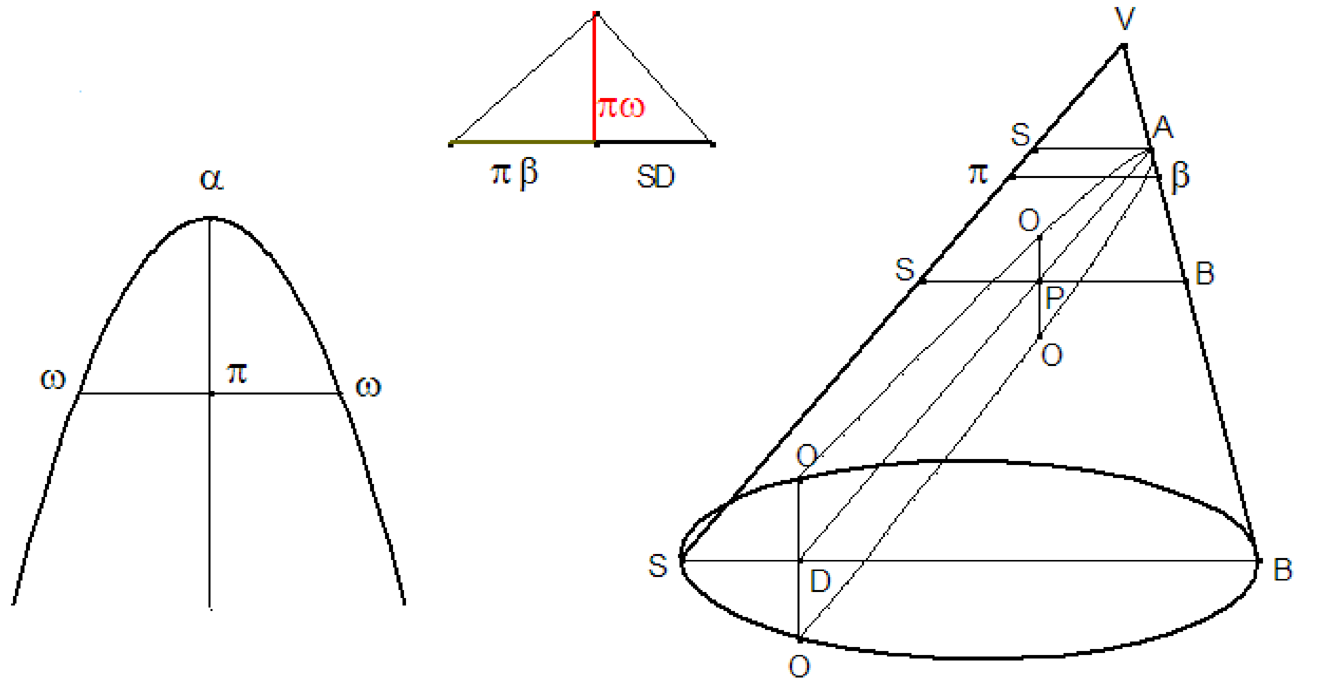

Fig. 5 e Fig. 6

Risulta chiaro da quanto finora detto che date le rette DB, DS (cioè DB, AS) si conosce anche DO (ordinatamente applicata in D al diametro) perché è media proporzionale fra le due rette assegnate. Non è vero il contrario: data DO, quelle due misure (DB, DS) sono del tutto accidentali ed estranee alla parabola (non giacciono neanche nel suo piano): proprio come accade nella moltiplicazione, dove il prodotto può essere ottenuto anche da altri fattori scelti in infiniti modi diversi. E così le rette DB, DS possono variare in infiniti modi mentre rimangono immutati sia il diametro della parabola che le rette ad esso ordinatamente applicate: basta infatti che quando aumenta o diminuisce PS o AS (lato del parallelogramma APS), di altrettanto diminuisca o aumenti PB (lato del triangolo APB). Per questo appunto (come dimostreremo tra poco) ***qualunque parabola si può collocare sulla superficie di qualsiasi cono.*** Non essendoci dunque alcun numero determinato che misuri rette strettamente legate alla parabola considerata con le quali spiegare la grandezza delle ordinate applicate, gli studiosi delle sezioni coniche hanno già da tempo sostituito con altre due le rette DB, DS (cioè DB, AS: mentre AS rimane invariata, DB varia con continuità quando ci si allontana o ci si avvicina al vertice della parabola). Una delle due nuove rette è AD, intercettata sul diametro, a partire da A, dal punto di applicazione D (AD appartiene quindi alla parabola; sostituisce la retta DB, a cui è sempre proporzionale: infatti AD e DB crescono o decrescono insieme, mantenendo costante il loro rapporto, mentre il punto di applicazione D si sposta). L'altra retta invece, che sostituisce DS o AS, si chiama ***lato retto*** (o anche , dopo Midorge, ***parametro***). Lo indicheremo con LA. Non appartiene alla sezione conica, né al cono: viene costruito mentalmente definendolo mediante la proporzione DB :

AL = DA : DS. Sicché i rettangoli DA×AL e DB×DS sono uguali fra loro, e uguali anche ai rettangoli DB×AS, cioè ai quadrati di lato DO. Introducendo simboli opportuni (per esempio *b* = DB, *s* = AS, *d* = AD, *l* = LA, *p* = DO) risulterà sempre: $p^2 = bs = dl$.
La relazione $p^2 = dl$ esprime la proprietà (sintomo) fondamentale della parabola, da cui ogni altra dipende e si può dedurre col calcolo. Che la parabola sia sezione del cono è un fatto del tutto accidentale. Quindi, ora che abbiamo trovato questa proprietà, possiamo abbandonare il cono: per la ricerca di ulteriori caratteristiche della parabola ci collocheremo nel piano, dove svilupperemo una trattazione completa di tale curva (***"absolute considerata"***) senza più utilizzare i coni.Si deve notare inoltre che, poiché la parabola ha infiniti diametri (come vedremo in seguito) e se cambia il diametro cambiano anche le rette ad esso ordinatamente applicate, ad ogni diametro spetta un suo particolare lato retto, diverso dagli altri. (Ciò vale anche per ellisse e iperbole).*Wallis passa poi a dimostrare la proposizione precedentemente enunciata: che ogni parabola si può collocare su qualsiasi cono. Riportiamo qui di seguito la sua dimostrazione.*

Sia data una parabola $\alpha\omega$, avente asse $\alpha\pi$; l'ordinata applicata a un generico punto π dell'asse sia $\pi\omega$. (Cfr. fig. 5).
Dico che tale parabola si può collocare su un cono VBS (Cfr. fig. 6) scelto a piacere.
Si tagli il cono prescelto con un piano che

a. Contenga l'asse del cono;
b. Sia perpendicolare alla base del cono.

La sezione sarà il triangolo VBDS (Cfr. sempre fig. 6).
Sopra uno qualunque dei lati del triangolo così ottenuto (ad esempio VS) si prenda V$\pi = \alpha\pi$ (π punto generico dell'asse). Si tracci inoltre $\pi\beta$ parallelamente alla base BS. Si cerchi la terza proporzionale fra $\pi\beta$ e $\pi\omega$: si disegni sulla base del triangolo una retta SD uguale a questa terza proporzionale (sarà quindi $\pi\beta : \pi\omega = \pi\omega$: SD). Per il punto D si tracci poi DA (parallela al lato VS del triangolo) che incontra in A l'altro lato VB. Dico che la retta AD è, nel cono, il diametro di una parabola coincidente con quella inizialmente assegnata. Infatti, consideriamo il piano DAO, passante per AD (parallela – come sappiamo – al lato VS) e perpendicolare al triangolo VBDS. Poiché sia il piano DAO sia la base BOSD del cono sono perpendicolari al triangolo VBS, la loro comune intersezione DO sarà una retta anch'essa perpendicolare al triangolo VBS: quindi sarà perpendicolare sia alla retta AD, sia a BS (diametro della base del cono). La sezione che il piano DAO produce sulla superficie del cono sarà dunque una parabola con asse AD.
Si prenda ora sull'asse AD una retta AP uguale a Vπ ($= \alpha\pi$); si tracci SPB parallela a SDB. Sarà (considerare in Fig. 6 i triangoli V$\pi\beta$ e APB)
PB = $\pi\beta$; ma è anche (osservare le rette parallele in Fig.6) SP = SD.
Quindi la retta PO ordinatamente applicata all'asse (media proporzionale tra SP e PB, cioè tra SD, $\pi\beta$) sarà uguale alla retta $\pi\omega$ (che per costruzione è media proporzionale tra SD e $\pi\beta$).

Pertanto, essendo sia AP = $\alpha\pi$, sia PO = $\pi\omega$; essendo inoltre l'angolo APO uguale all'angolo $\alpha\pi\omega$ (sono entrambi retti); i punti α, π, ω e i punti A, P, O si possono sovrapporre perfettamente, così come le rette AP, PO e $\alpha\pi$, $\pi\omega$. Il medesimo ragionamento si può ripetere con riferimento a ogni altro punto dell'asse. Quindi le parabole $\alpha\omega$ e AO sono totalmente congruenti, come volevasi dimostrare.

Nell'ultima parte del discorso dedicato alla prop. XII, Wallis espone una altra dimostrazione (per via analitica) del medesimo teorema (ogni parabola si può collocare sulla superficie di qualsiasi cono)

Prop. XIII. (***Ellisse*** come sezione del cono).

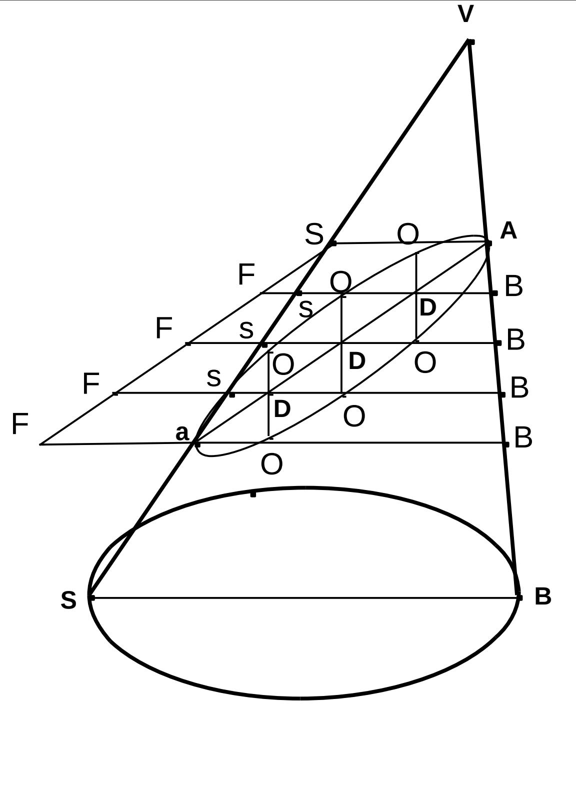

Fig. 7

Nell'ellisse ogni quadrato delle rette ordinatamente applicate al diametro è uguale alla differenza fra due rettangoli: il primo dei quali (quello maggiore) è proporzionale alla parte di diametro intercettata, mentre quello minore è proporzionale al quadrato di tale parte.

Infatti (cfr. Fig. 7) si ha $DO^2 = BD \times DS$ (vedi prop. VII). Condotta ora una retta SF parallela alla retta Aa, dopo aver prolungato le rette BDS fino ad F si avrà sempre: $DS = DF - FS$. Quindi: $BD \times DS = BD \times DF - BD \times FS$.

Ma i rettangoli BD × DF (essendo tutte le DF fra loro uguali) sono proporzionali a DB quindi anche a DA (porzione di diametro intercettato: considerare i triangoli simili ADB); invece i rettangoli BD × FS (poiché tanto BD quanto FS sono proporzionali a DA) risultano proporzionali al quadrato della medesima porzione DA.

Si ha dunque sempre: $DO^2 = BD \times DF - BD \times FS$, come volevasi dimostrare.

Le successive proposizioni XIV e XV sono dedicate alla definizione di altre figure solide (conoidi e piramidoidi ellittici) e alle loro sezioni.

Prop. XVI. (Sul ***lato retto*** della ***ellisse***: cfr. Fig. 8).

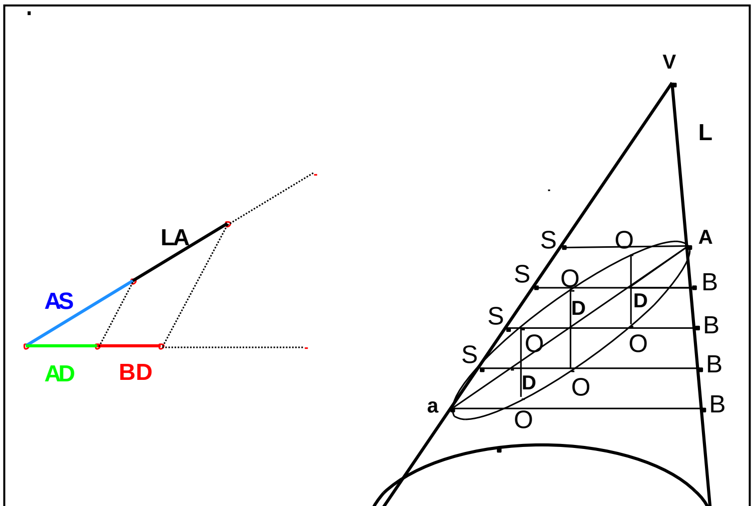

Fig. 8

Risulta chiaramente da quanto detto che, conoscendo le rette BD, DS (quindi il rettangolo BD × DS) è noto anche il quadrato di DO. Non è vero il contrario: conoscendo DO, non è possibile determinare BD, DS; infatti i rettangoli BD × DS possono variare in infiniti modi mentre restano costanti i valori delle rette ordinatamente applicate al diametro, e da ciò risulta che la medesima ellisse può appartenere a coni profondamente diversi (cfr. quanto detto nella prop. XII sulla parabola). Gli studiosi delle sezioni coniche hanno dunque scelto (come nel caso della parabola) di determinare il valore delle applicate al diametro di una ellisse assegnata sostituendo le rette BD, DS con altre due, che sono:

1) AD, intercettata sul diametro dal punto D (a partire da A) e proporzionale a BD;
2) LA, retta immaginaria chiamata ***lato retto*** e definita dalla proporzione LA : BD = AS : AD; sicché risulta sempre

   BD × AS = AD × LA (**1**)

Dunque il lato retto soddisfa alle relazioni:

$LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, oppure $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Allora (prolungato AD fino ad incontrare in *a* il lato opposto del triangolo per l'asse, allo scopo di ottenere il diametro trasverso A*a*) si avrà (considerare i triangoli simili AS*a* e DS*a*) A*a* : AS = D*a* : DS, cioè:

$DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$. Si ha dunque:

$DO^2 = BD \times DS = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$ (cfr. qui sopra la (**1**)).

Introducendo simboli opportuni (ad esempio *t = Aa*, *d = DA*, *t – d = Da*, *l = LA*, *e = DO*) possiamo scrivere

$$e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td - d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2 \quad (\mathbf{2})$$

dove e^2 è il quadrato delle rette ordinatamente applicate al diametro dell'ellisse.

Si ha inoltre (ritornare alla Fig. 7): *ld* = FD × DB, $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB,$ quindi: $ld - \frac{l}{t} d^2$ = FD ×DB – FS × DB = SD × DB = DO^2.

Le (**2**) forniscono la proprietà (sintomo) fondamentale dell'ellisse, da cui ogni altra proprietà dipende e si può dedurre col calcolo. Non sarà più necessario ricorrere al cono per approfondire lo studio della curva, che risulterà più facile e chiaro collocandola nel piano ("***absolute considerata"***), come faremo in seguito.

Prop. XVII. (***Iperbole*** come sezione del cono: cfr. Fig. 9).

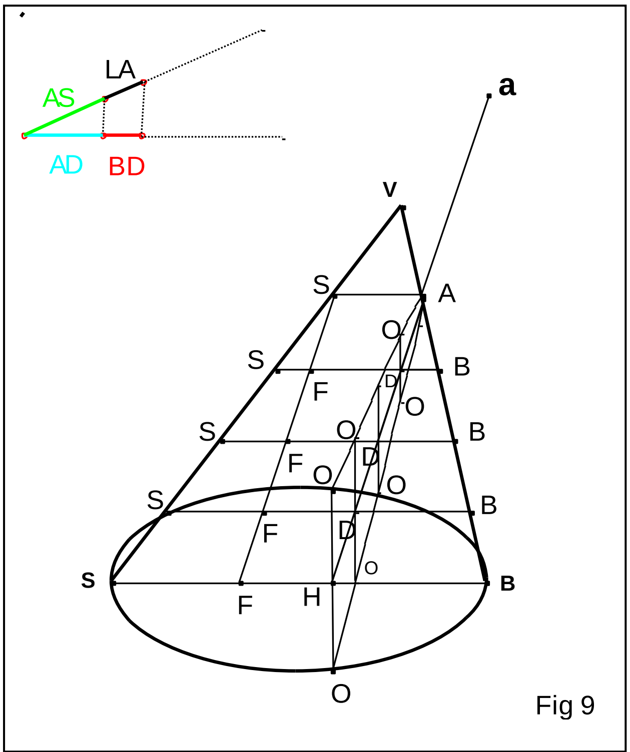

Fig 9

Nell'iperbole, ogni quadrato delle rette ordinatamente applicate al diametro è uguale alla somma di due rettangoli: uno dei quali è proporzionale alla parte di diametro intercettata (DA), mentre l'altro è proporzionale al quadrato di tale parte.
Si ha infatti (vedi prop. VII) $DO^2 = BD \times DS$.
Tracciata una retta SFF (cfr. Fig. 9) parallela ad AH (che divide il trapezio SSHA nel parallelogramma SFHA e nel triangolo SFS), sarà sempre DS = DF + FS.
Quindi: BD × DS = BD × DF + BD × FS. Ma i rettangoli BD × DF (essendo tutte le DF fra loro uguali) sono proporzionali alle rette BD, dunque anche alle DA (parti di diametro intercettate). Inoltre i rettangoli BD × FS (essendo sia BD che FS rette proporzionali a DA) sono proporzionali al quadrato delle DA.
Si ha dunque sempre $DO^2 = BD \times DF + BD \times FS = BD \times DS$, come volevasi dimostrare.

Nelle successive proposizioni XVIII e XIX vengono definite e sommariamente studiate (insieme alle loro sezioni) altre figure solide (conoidi e piramidoidi iperbolici).

Prop. XX. (Sul ***lato retto*** della ***iperbole***). Poiché nell'iperbole, come si è detto, $DO^2 = BD \times DS$, il valore delle rette ordinatamente applicate DO può essere determinato conoscendo BD e DS. Non è vero il contrario (infatti, mentre DO rimane costante, le rette BS e DS possono assumere infiniti valori diversi: o perché cambia il cono, oppure perché applicate in modo diverso sul medesimo cono; osservazioni analoghe abbiamo fatto a proposito della parabola e della ellisse nelle prop. 12 e 16).
Quindi, gli studiosi hanno preferito sostituire le rette BS e DS con altre due, con le quali esprimere il valore delle DO (rette ordinatamente applicate al diametro dell'iperbole). Le nuove rette (che caratterizzano sempre la medesima iperbole, qualunque sia il cono su cui essa giace, in qualunque modo essa venga collocata sul cono, e anche se essa giace su un piano senza essere collegata ad alcun cono) sono le seguenti.

1) AD: intercettata sul diametro della curva dal punto D, è proporzionale a BD;

2) LA, che si chiama ***lato retto*** ed è una retta immaginaria definita dalla proporzione AD : AS = DB : LA. Risulta quindi sempre DB×AS=AD×LA, sicché il lato retto soddisfa alle relazioni:
$LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, e $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Prolunghiamo ora il diametro DA oltre l'iperbole fino ad incontrare in *a* il triangolo o il cono opposto (vedi Fig. 9). Dai triangoli simili A*a*S, DAS si ricava A*a* : AS = D*a* : DS, quindi
$DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$.

Dunque, dalle relazioni precedentemente determinate si ricava:
$DO^2 = BD \times DS = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$.

Introducendo simboli opportuni, per esempio *t = Aa, d = DA, t + d = Da, l = LA, b = DO*, possiamo scrivere
$b^2 = \frac{t+d}{t} ld = \frac{td+d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$

Si ha inoltre (Fig. 9): $ld = FD \times DB$, $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$; di conseguenza
$ld + \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB + FS \times DB = DO^2$.

Abbiamo così ricavato la principale proprietà caratteristica (sintomo) dell'iperbole. Da questa tutte le altre proprietà dipendono e si possono ricavare col calcolo. Le investigheremo in seguito, dando inizio a una trattazione della curva ("***absolute considerata"***) del tutto indipendente dai coni.