Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo N° 12
DE LA HIRE (1673)

GENERAZIONE DELLE CONICHE MEDIANTE UNA TRASFORMAZIONE NEL PIANO

Nel trattato del 1673 (Nouvelle méthode en Géométrie pour les Sections des Superficies Coniques et Cylindriques qui ont pour bases des Cercles, ou des Paraboles, des Ellipses & des Hyperboles) le coniche sono generate mediante una notevole trasformazione piana (si tratta – nel linguaggio contemporaneo – di una omologia determinata da centro, asse e una retta limite) la quale muta una circonferenza in una curva del secondo ordine.
*Traduciamo qui di seguito una parte del capitolo intitolato "**Les Planiconiques**", dove tale trasformazione viene introdotta.*

Definizione. Si considerino in un piano due rette fra loro parallele e un punto: una delle due rette sia chiamata ***direttrice***, l'altra ***formatrice***, il punto ***polo***.

*Nel linguaggio contemporaneo: la **formatrice** è **l'asse della omologia** (retta luogo di punti uniti); la **direttrice** è la **retta limite**; il punto fissato nel piano il **centro della omologia**.*

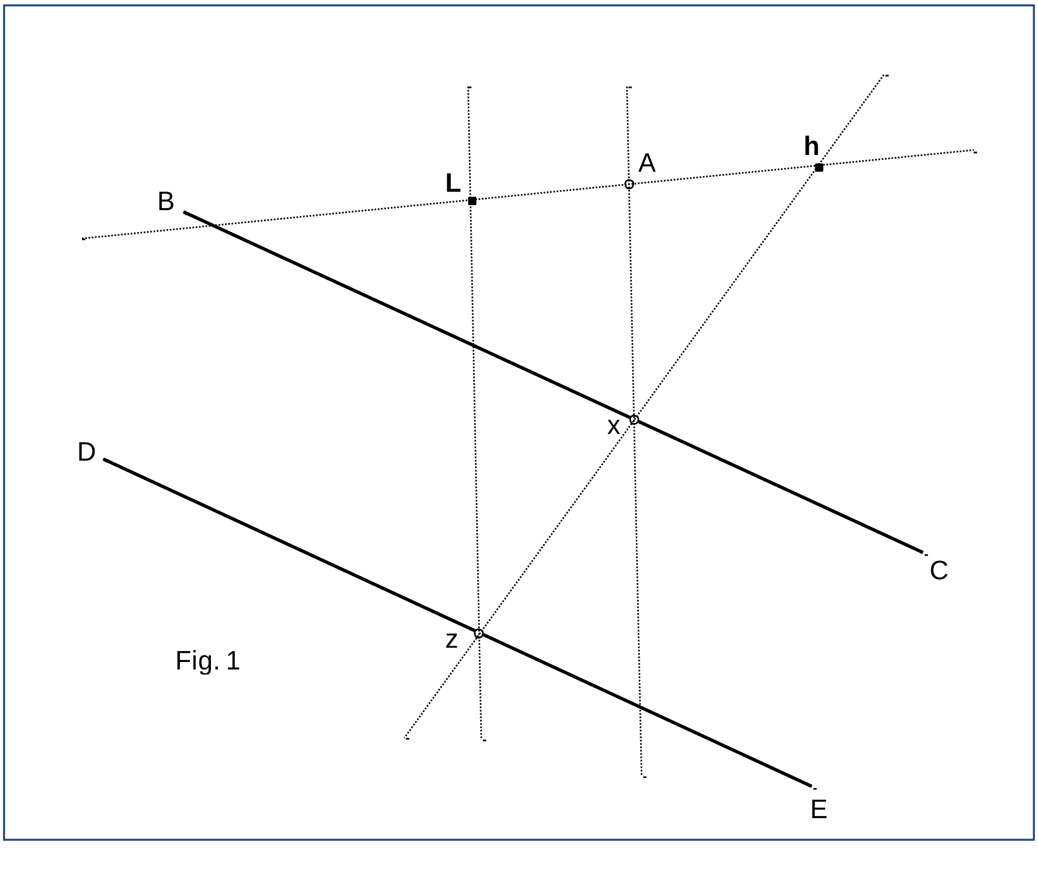

Fig. 1

Generazione di punti. Se si ha su un piano (Cfr. Fig. 1) la direttrice BC, la formatrice DE e il polo A esterno alla direttrice, si prenda un punto qualunque **h** su questo stesso piano; si tracci poi la retta Ah passante per il polo A e un qualunque retta hx che incontri la direttrice in x e la formatrice in z; infine si tracci Ax e per il punto z la retta zL parallela ad Ax che incontri Ah in **L**. Dico che il punto **L** è ***formato*** dal punto **h**.
Si vede da questa generazione che i punti formati come **L** stanno sempre sulle rette congiungenti il polo A con i punti come **h**, che li formano.
Si vede anche che più punti formati come **L** non saranno sovrapposti se i punti che li formano sono separati.
Inoltre i punti della direttrice non possono formare alcun punto.

Lemma 21
Se la direttrice, la formatrice e il polo A non cambiano, il punto h non può formare altro punto che L. Per il punto h si tracci infatti (Cfr. Fig. 2) un'altra retta hyu che incontri la direttrice in y e formatrice in u; poi si tracci Ay e ul parallela ad Ay. Io dico che i punti l ed L sono un unico punto.
Infatti, poiché le rette: Ax, zl; xy, zu; yA, uL sono parallele si ha che le coppie di triangoli: hAx e hlZ; hxy e hzu; hyA e huL sono costituite da triangoli simili. Perciò hA:hl = hx:hz = hy:hu = hA:hL. Allora hl ed hL sono uguali e i due punti l ed L sono il medesimo punto.

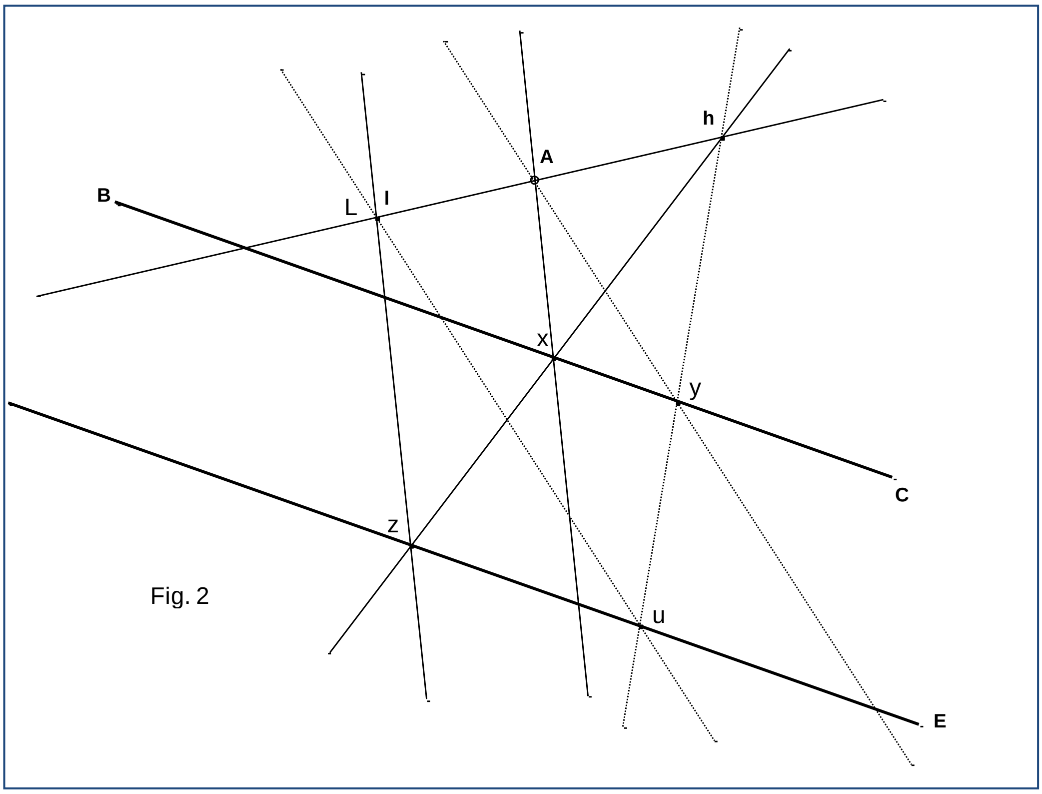

Fig. 2

Corollario 1. E' evidente che si può scegliere come punto x qualunque punto appartenente alla direttrice. Tracciata la retta Ax passante per il polo, essa può servire per la generazione di qualsiasi punto, tranne soltanto il caso in cui il punto formante si trovi sulla linea Ax stessa. In questo caso si può cambiare la scelta di x (come è stato dimostrato nel lemma precedente).
Sia h il punto formante. Dopo aver disegnato le due rette xh e Ah, per il punto z in cui xh incontra la formatrice DE si traccerà zL parallela ad Ax: la retta zL incontrerà (da una parte o dall'altra) la retta Ah in L, che sarà il punto formato.

Lemma 22.
Se il polo A, la direttrice e la formatrice non cambiano, allora tutti i punti (h, n, m,…) appartenenti a una retta daranno origine (mediante la generazione descritta nella definizione 1) a punti (L, N, M,…) allineati.
Si dice che la retta LNM è ***formata*** dalla retta hnm.

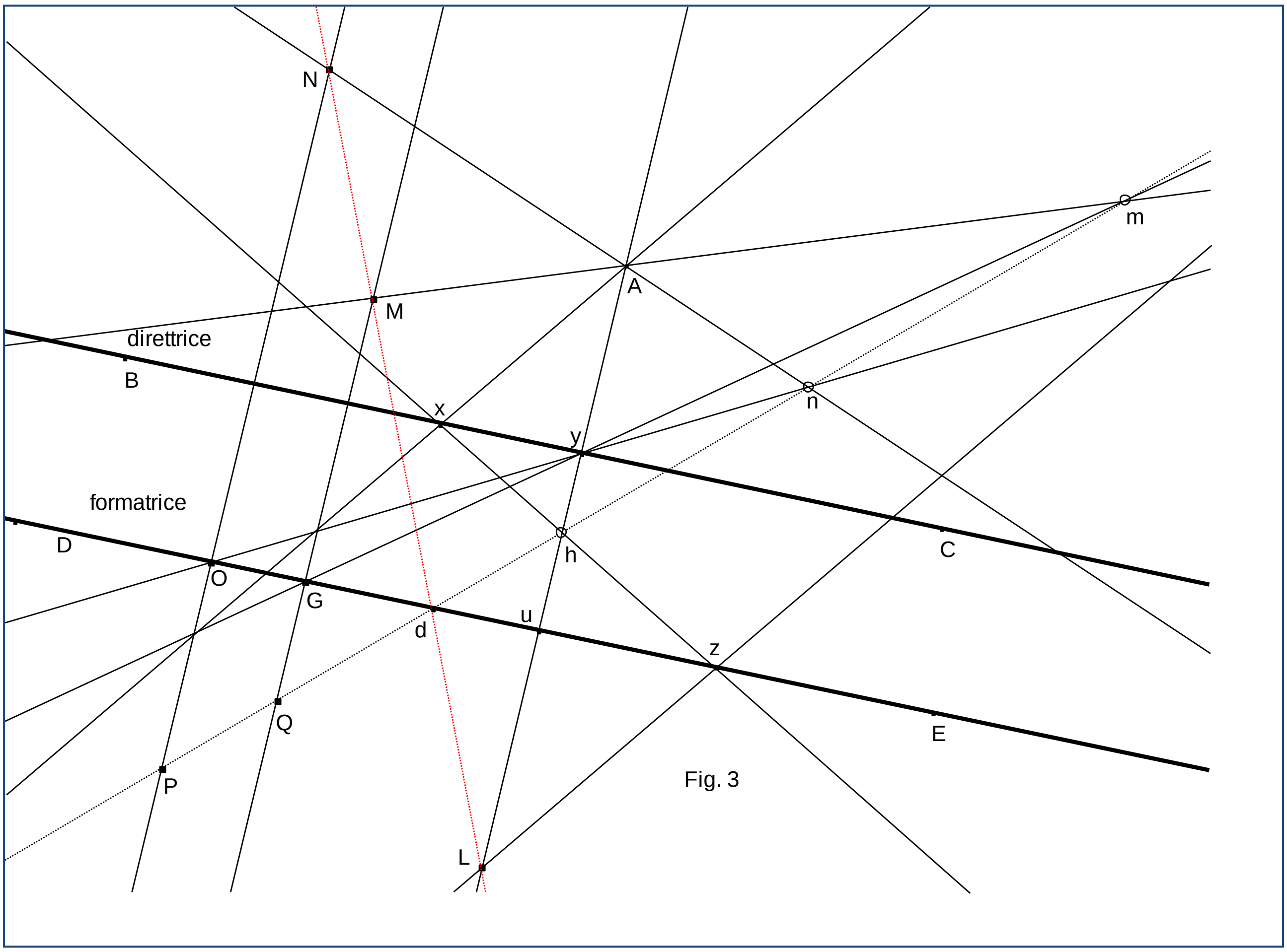

Fig. 3

Illustriamo la costruzione della retta formata dai tre punti h, n, m. (Cfr. Fig. 3).
Si traccino le rette Ah, An, Am passanti per il polo A. Una di esse (per es. Ah, prolungata se necessario) incontri la direttrice in y e la formatrice in u. Si disegnino inoltre le rette yn e ym che incontrano la formatrice nei punti O e G, poi le rette

ON, GM, parallele ad Ay, le quali generano, intersecando An e Am, i punti N ed M, ***formati*** da n ed m (cfr. ***Corollario del Lemma 1***). Inoltre, ON e GM incontrano la retta dei punti h, n, m in P e in Q (rispettivamente).
Si tracci infine una linea qualunque hx passante per il punto h: sia x la sua intersezione con la direttrice BC, z la sua intersezione con la formatrice DE.
Congiunto A con x e tracciata la retta passante per il punto z e parallela ad Ax, si otterrà, come intersezione con Ah, il punto L, ***formato*** da h (cfr. ***Definizione 1***).
Dimostriamo che i punti L, N, M sono allineati.
Dai triangoli simili hAx, hLz e hyx, huz si ricavano le proporzioni:
hA : hL = hx : hz = hy : hu, quindi anche hA : hy = hL : hu (*)
Ricordiamo che i punti h, n, m, Q, P giacciono su una medesima retta, e che ON e GM sono parallele ad Ay. Allora, considerando i triangoli simili Anh ed NnP, abbiamo:
hA : hy = PN : PO, cioè per la (*): hL : hu = PN : PO.
Analogamente, dai triangoli Amh ed MmQ ricaviamo hA : hy = hL : hu = = QM : QG.
Possiamo scrivere quindi: PN : PO = QM : QG = hL : hu. Si ricava che, poiché i punti u, O, G stanno sulla retta DE che è la formatrice, anche i punti L, N, M saranno anch'essi allineati.
Se poi la retta hm è parallela alla direttrice e passa per il polo A i suoi punti ne formeranno altri che staranno sulla stessa retta. (Verificare con la costruzione).
Si dice che ***la retta LNM è formata dalla retta hnm***.

Corollario 1. E' evidente che la retta LM formata e la retta hm che la forma si incontrano in un punto d appartenente alla formatrice DE, oppure sono ad essa parallele, quindi parallele anche alla direttrice.

Corollario 2. E' altresì evidente che una linea curva non formerà mai una retta.

Corollario 3. E’ inoltre evidente che una retta come xh (proveniente da un punto della direttrice) formerà una retta zL parallela ad Ax (congiungente il polo A con il punto x della direttrice): infatti tutti i punti di xh formano punti appartenenti a linee rette parallele ad Ax, passanti tutte per il punto z e quindi coincidenti con zL. Possiamo anche dire che una retta zL sarà formata dalla linea xzh congiungente il punto z in cui zL interseca la formatrice col punto x in cui Ax (retta per A parallela a zL) interseca la direttrice. Segue (Cfr. Fig. 4) che tutte le rette passanti per un punto x della direttrice formeranno linee parallele fra loro e alla linea congiungente il polo A con x. Viceversa se le rette formate sono fra loro parallele, allora quelle che le formano passano tutte per il medesimo punto della direttrice, a meno che le rette formate siano parallele anche alla direttrice: in quest’ultimo caso sia le rette formanti che quelle formate sono tutte parallele sia alla direttrice che alla formatrice (cfr. Corollario 1).

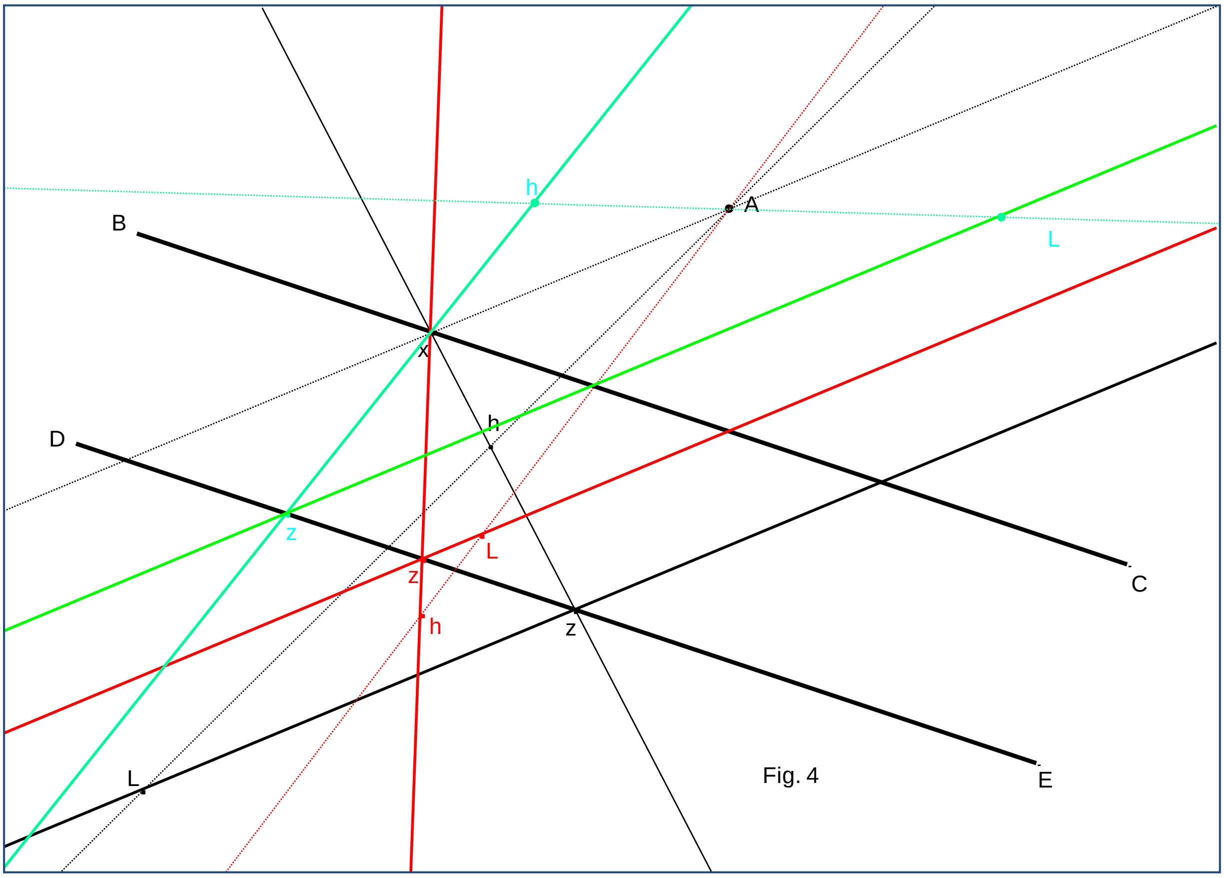

Fig. 4

Lemma 23.
Manteniamo tutte le ipotesi ammesse finora. Io dico che rette come xz, yu, nh parallele fra loro e intersecanti la direttrice BC (nei punti x, y, n) formeranno rette passanti tutte per un medesimo punto a.

Per il corollario 3 del Lemma 22, la retta xz ne formerà un'altra za parallela ad Ax; la retta yu formerà au parallela ad Ay; la retta nh formerà ah parallela ad An; dunque, il parallelismo ipotizzato tra xz, yu, nh e quello fra BC e DE (direttrice e formatrice) ci garantiscono che i punti z, u, h e i punti x, y, n sono egualmente disposti. Ma allora, poiché le rette Ax, Ay, An passano tutte per il punto A, anche le rette za, ua, ha (a loro parallele) passano tutte per un punto a. (Cfr. Fig. 5).

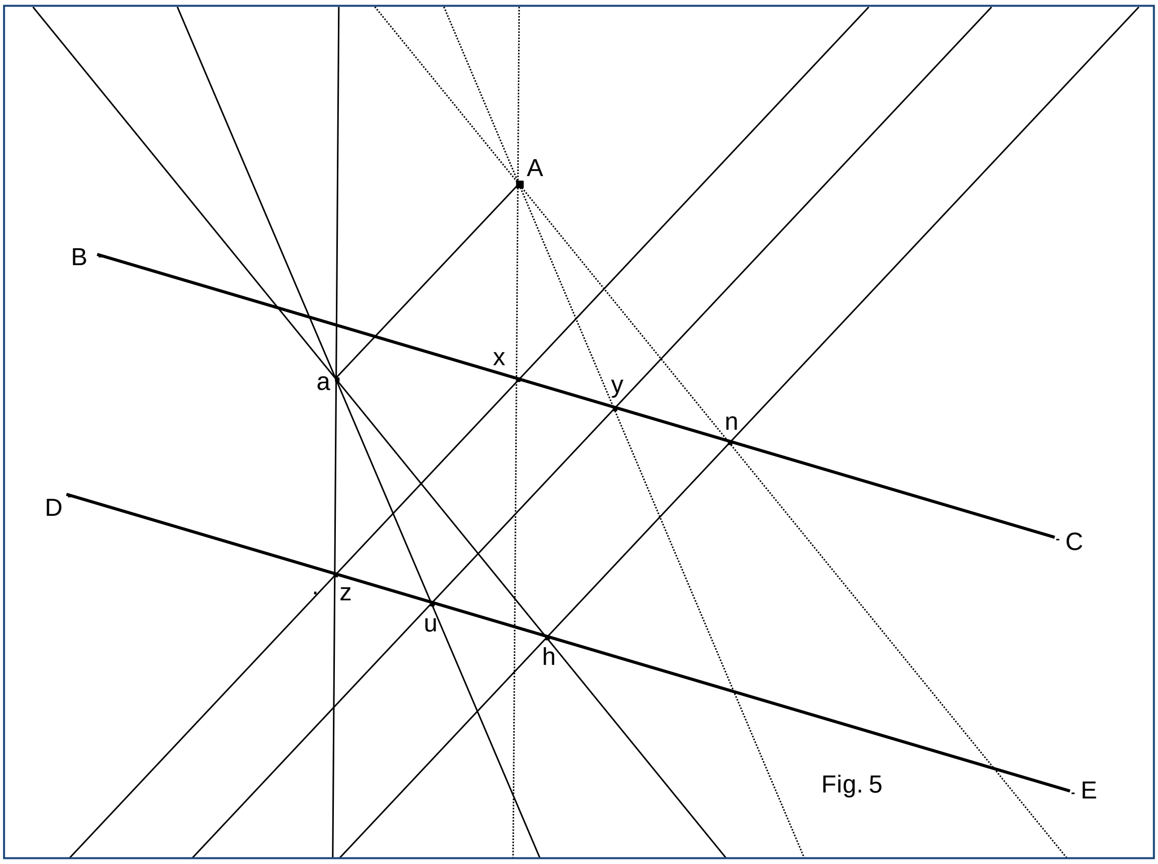

Fig. 5

Corollario 1. E' evidente che la linea Aa è parallela e uguale in lunghezza alla parte di ognuna delle parallele considerate compresa fra direttrice e formatrice. (Cfr. Fig. 5).

Lemma 24.

Siano date su un piano una circonferenza lhn e una retta Ch tangente al cerchio in h. Io dico che la retta cH formata da Ch incontra in un solo punto H la linea curva LHN formata dalla circonferenza.

Infatti, se fosse possibile che la linea retta cH incontrasse la curva LHN in più di un punto (per esempio in H e in N) seguirebbe che la formante Ch dovrebbe passare per i punti h ed n che (cfr. Lemma 22) formano i punti H ed N della curva formata. Ciò contrasta l'ipotesi che Ch sia tangente alla circonferenza.

<u>Le sezioni delle superfici coniche sono curve formate da una circonferenza seguendo il metodo sopra descritto</u>.

(Cfr.: Generazione di punti, definizioni, lemmi e corollari precedenti). ***Osservare la Fig. 6 [(con animazione)](#) e, inoltre, la [animazione1](#).***

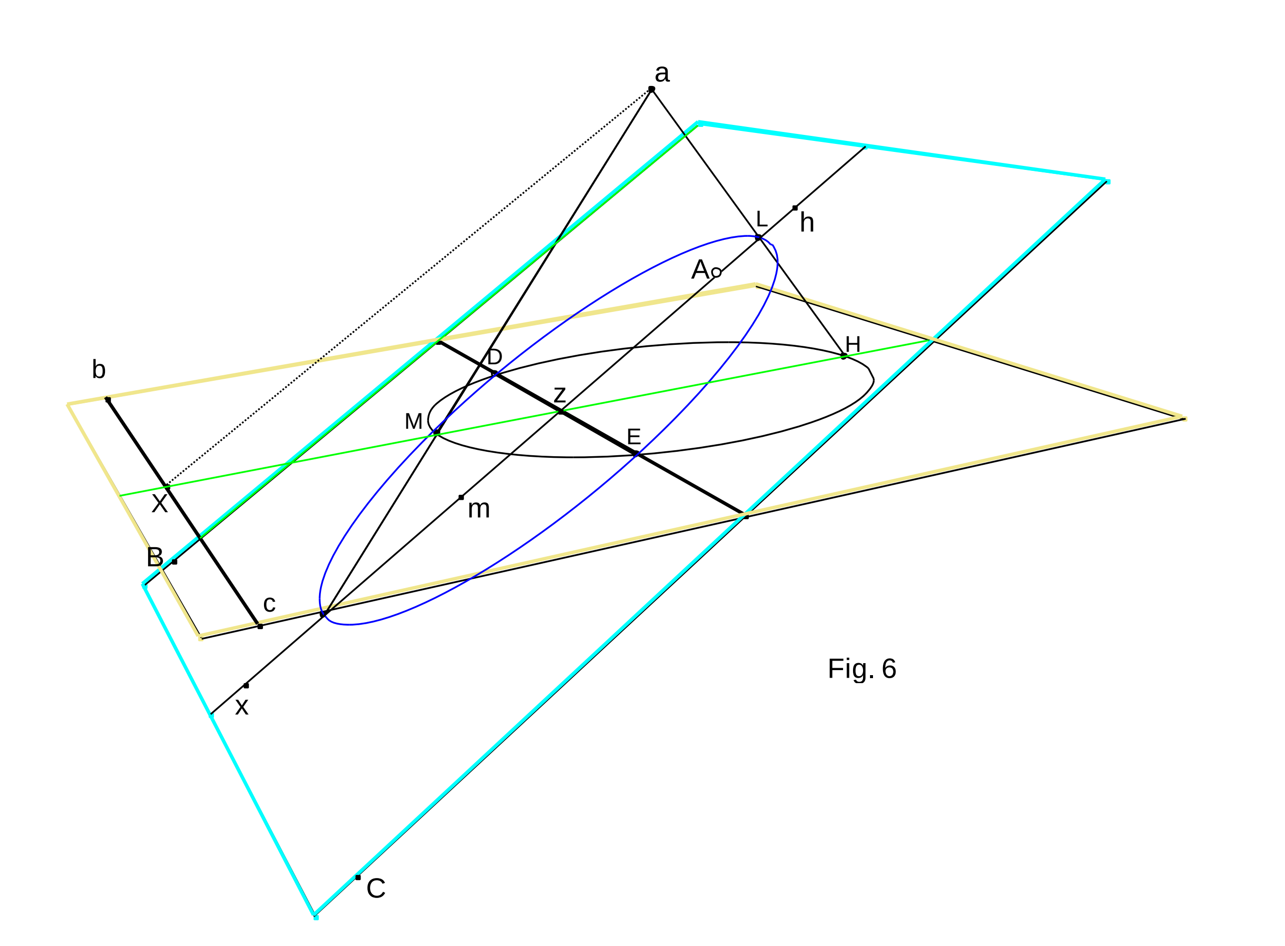

Fig. 6

Sia dato un cono **a**DHEM avente come base la circonferenza DHEM e come vertice il punto **a**; supponiamo che sia tagliato da un piano DLE;
io dico che la linea DLE ottenuta su questo piano come intersezione col cono è una curva formata a partire da una circonferenza, seguendo il metodo sopra descritto.

1) Si conduca per **a**, vertice del cono, un piano **abc** parallelo al piano secante DLE; il piano **abc** incontri il piano di base del cono lungo la retta **bc**; da uno dei punti H della circonferenza di base del cono si tracci la retta H**X,** la quale incontri DE in **z** e **bc** in X.
   Il piano di base DHX**cb** del cono – sul quale piano sono posti la circonferenza DHEM, la retta DE**z** (sezione del piano secante con la base del cono), la retta **bc** e la retta HX – sia poi sovrapposto al piano secante, in modo che la retta DE**z** e il punto **z** rimangano immobili.

E’ allora evidente che il cerchio DHEM (base del cono) in quanto giacente sul piano secante in D**h**E**m**, sarà collocato rispetto ai punti della retta D**z** come il cerchio DHEM rispetto ai punti della medesima retta. Ciò significa che se da qualche punto **z** della retta D**z** si traccia (sul piano di base) una retta **z**H che incontri il cerchio DEM in H, e se dal medesimo punto **z** se ne traccia un’altra **zh** (sul piano secante) in modo che gli angoli D**zh** e D**z**H siano uguali, allora **zh** incontrerà il cerchio DE**m** in **h** e sarà **zh** = **z**H.
E’ inoltre evidente che sul piano secante le rette B**x**C e DE hanno distanza uguale a quella esistente, sul piano di base, tra la retta **b**X**c** e la medesima DE (queste tre rette sono tutte parallele fra loro).
Non solo: tutte le rette tracciate dai punti **x** e X (rispettivamente sul piano secante e sul piano di base) verso un medesimo punto della retta DE saranno uguali fra loro e formeranno con DE (o con le parallele **bc** e BC a DE) angoli uguali (infatti per le ipotesi fatte si ha: angolo D**z**X = angolo D**zx**)
Infine, si tracci sul piano secante la retta **x**A che formi con BC un angolo B**x**A uguale all’angolo **b**X**a** esistente sul piano condotto per il vertice del cono parallelamente al piano secante: è evidente che **x**A e X**a** sono parallele (giacciono infatti su piani paralleli, ed è inoltre **bc** parallela a BC). Si fissi poi la posizione di A prendendo **x**A = X**a**.

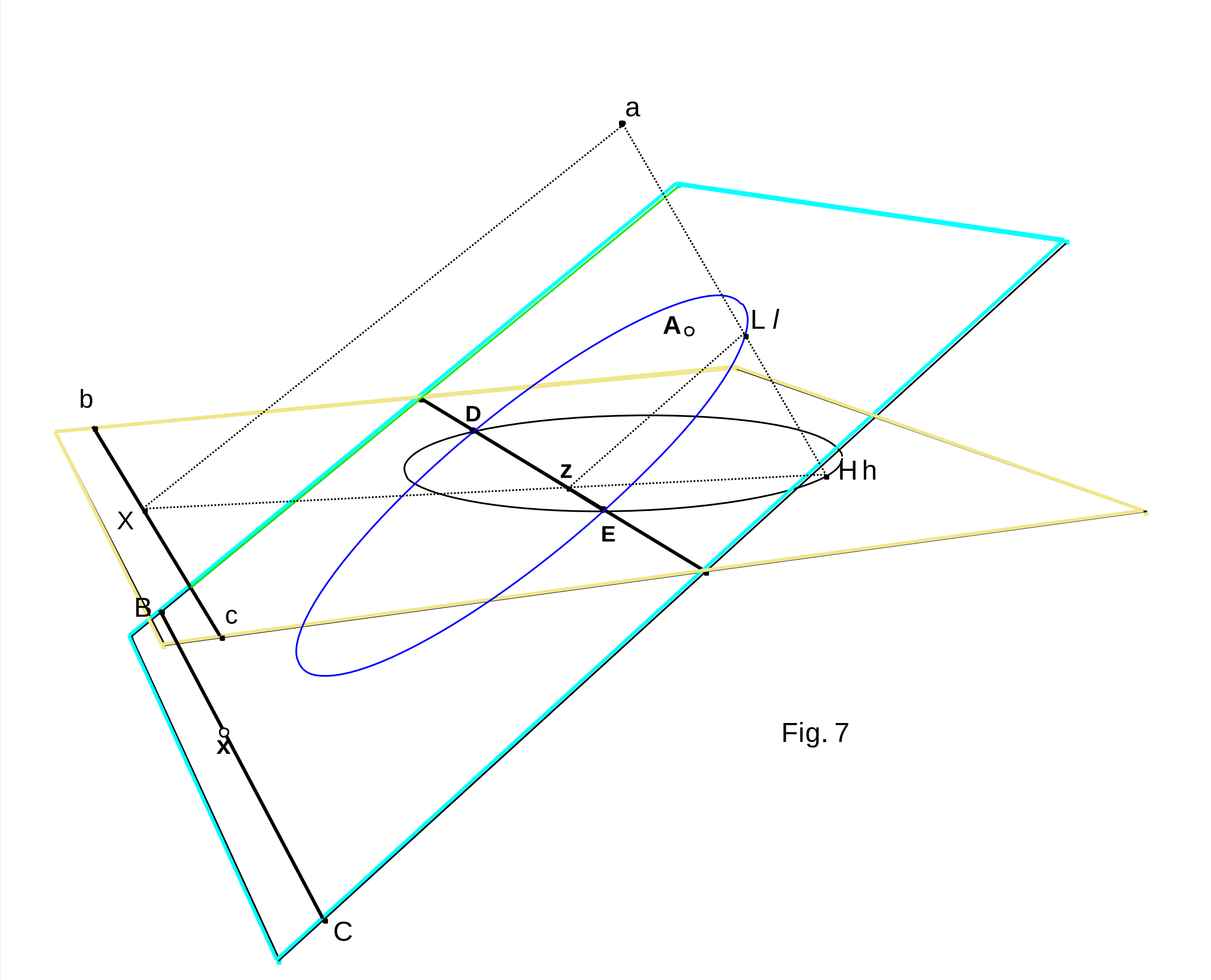

Fig. 7

2) Sia ora: A il **polo**, BC la **direttrice**, DE la **formatrice**.
Io dico che la circonferenza D**h**E**m** formerà la curva DLE. Osservare la Fig. 7 (con animazione). Dal vertice **a** del cono si tracci una retta **a**L passante per un punto qualsiasi L della curva DLE; tale retta incontri in H la base del cono. Si traccino poi le rette XH (che incontrerà DE in un punto Z), e ZL.
X**a** e ZL saranno parallele: infatti giacciono nel piano del triangolo **a**XH, inoltre ZL si trova sul piano secante, mentre X**a** appartiene al piano passante per il vertice del cono e parallelo al piano secante. Poiché X**a** e **x**A sono (uguali e) parallele, saranno parallele anche **x**A e ZL: dunque, utilizzando il triangolo HX**a**, possiamo scrivere la proporzione XH : ZH = X**a** : ZL (**§**).
A questo punto, sovrapponiamo (cfr. le animazioni) piano di base del cono e piano secante; congiungiamo il punto **x** della direttrice col punto Z della formatrice; la retta **x**Z incontrerà (si ricordi la costruzione descritta in 1) la circonferenza DhEm in un punto **h** tale che x**h**= XH e Z**h**= ZH. Sui piani sovrapposti costruiamo (con la procedura spiegata all'inizio del fascicolo: cfr. **generazione di punti**) il punto ***l*** formato dal punto **h** (assumendo A come polo,

B**x**C come direttrice, DZE come formatrice); possiamo allora scrivere, utilizzando il triangolo A**xh**, la proporzione **xh** : Z**h** = **x**A : Z***l*** (§§).
Confrontando (§) e (§§) si conclude che, essendo uguali nelle due proporzioni i primi tre termini, è anche ZL = Z***l*** . Perciò i punti L ed ***l*** sono un unico punto: il teorema risulta così dimostrato.

Osserviamo che quando la direttrice è tangente al cerchio generatore, allora il piano condotto dal vertice del cono parallelamente al piano secante è tangente al cono stesso: in questo caso la curva sezione si chiama **parabola**.
Se la direttrice non incontra il cerchio generatore, oppure se il piano per il vertice parallelo al piano secante non incontra il cono, la curva sezione è chiamata **ellisse**; questa sezione può anche essere una circonferenza. In questo caso particolare Apollonio la chiama **sezione sottocontraria**. (Per comprendere questa denominazione, cfr. Fig. 8 e animazione).

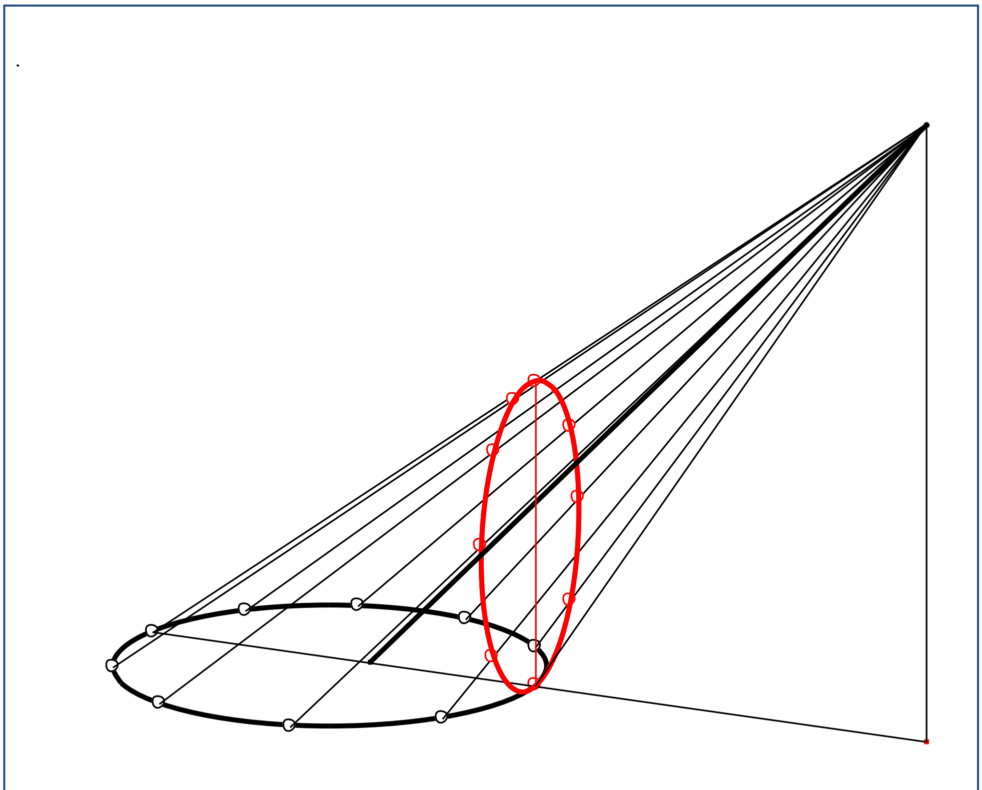

Fig. 8

Infine, se la direttrice interseca il cerchio generatore, oppure se il piano per il vertice del cono parallelo al piano secante taglia il cono stesso, la curva sezione è chiamata **iperbole**; le sezioni dei due coni opposti al vertice tagliati entrambi, in questo caso, dal piano secante sono chiamate **iperboli opposte** (**sezioni opposte**).
Abbiamo già spiegato (cfr. **Fascicolo N° 11**) perché Apollonio dà questi nomi alle sezioni del cono. Prima di Apollonio, la parabola era chiamata **sezione del cono rettangolo**, l'ellisse **sezione del cono acutangolo**, l'iperbole **sezione del cono**

ottusangolo: si consideravano infatti solo coni retti e piani secanti perpendicolari a uno dei lati del triangolo per l'asse.
Non importa, per la generazione di queste curve, che la formatrice tagli o non tagli il cerchio generatore, né quale sia la sua posizione rispetto alla direttrice o al cerchio generatore: ciò non cambia la natura della curva. In conseguenza di tali diverse posizioni la curva sezione si troverà al di sopra della base del cono, oppure prolungata oltre la base, oppure giacente sul cono opposto al vertice.

Costruzione di De La Hire: un esempio