Fascicolo N° 11

PH. DE LA HIRE
NOUVEAUX ÉLEMENTS DES SECTIONS CONIQUES: LES LIEUX GEOMETRIQUES : LES CONSTRUCTIONS OU EFFECTIONS DES EQUATIONS (1679)

*Il trattato del 1679 è diviso in tre **parti**.*
*Nella **prima** (Nouveaux elemens des Sections coniques) le coniche sono studiate geometricamente nel piano partendo dalle loro proprietà focali.*
*La **seconda** (Les Lieux Géométriques) si occupa di curve e superficie. De La Hire utilizza le coordinate cartesiane e la terminologia introdotta da Desargues (ad esempio "tige" e "rameau" sono le coordinate di un punto arbitrario, "noeud" il piede dell'ordinata del punto considerato).*
*La **terza parte** è dedicata alle equazioni (soluzioni grafiche e algebriche).*

*Presentiamo qui alcuni estratti dalla **prima parte**, premettendo la giustificazione che De La Hire fornisce (a pag. 157) per la sua scelta di definire le coniche in modo che sia possibile (in base alle definizioni proposte) costruirle **per punti** (con riga e compasso) e non **per moto continuo.***

"La descrizione delle linee curve che si fa nel piano mediante il moto continuo di un punto realizzato con Macchine, è così soggetta ad errori che basta servirsene una sola volta per essere indotti a un completo rifiuto.
Perciò mi sono convinto che per tracciare tali curve non si deve cercare altro che una grandissima quantità di punti (ad esse appartenenti e facilmente determinabili) congiungendo i quali si possa poi disegnare la curva desiderata. E siccome accade spesso che serva conoscere soltanto un piccolo arco della curva è senz'altro possibile trovare, in questo spazio ristretto, un numero di punti talmente elevato che l'errore commesso congiungendoli sia del tutto trascurabile. La descrizione delle sezioni coniche da me proposta è considerata generalmente la più semplice di tutte ove si conoscano i fuochi o gli assi: sarebbe quindi inutile cercarne altre ***se i fuochi o gli assi sono assegnati.***
Però spesso accade che si debbano tracciare queste linee sul piano ***conoscendo soltanto*** (ad esempio):
nel caso della ***parabola***, uno dei diametri, il relativo parametro e l'angolo tra i diametri e le ordinate;
nel caso della ***ellisse*** due diametri coniugati;
nel caso della iperbole l'angolo fra gli asintoti e qualche punto della curva, oppure un diametro e il relativo parametro.

Può anche darsi che sia necessario tracciare una delle tre coniche conoscendone solamente un diametro e una delle ordinate ad esso relativa.
Credo quindi che sarebbe gradevole sapere come si possono disegnare le coniche anche quando non si conoscano i fuochi o gli assi, e i dati siano quelli che abbiamo appena indicato".

Nelle ultime pagine (159 – 176) della prima parte del suo trattato, De La Hire si dedica appunto alla soluzione di questi problemi (***ad es***.: dato il diametro di una sezione conica e una delle ordinate ad esso relative, trovare il parametro della conica e, nel caso dell'ellisse, il diametro coniugato; ***ecc***.). *Ma vediamo intanto come egli definisce e costruisce le tre curve.*

LA PARABOLA

Generazione della parabola.

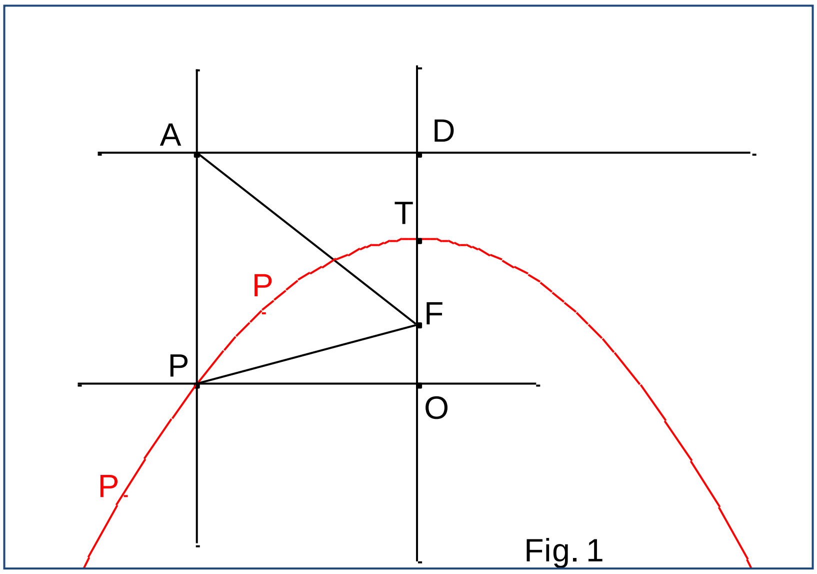

Fig. 1

Siano dati su un piano una linea retta AD e un punto F ad essa esterno. Io dico che è possibile trovare una infinità di punti P tali che la linea FP congiungente F con ognuno dei punti P sia uguale alla linea PA uscente da P e perpendicolare alla AD. (Cfr. Fig. 1).
Da un punto qualsiasi di AD (per esempio A) si tracci AP perpendicolare alla retta AD; si congiungano poi F ed A; infine, si disegni l'angolo AFP uguale all'angolo FAP. Il punto P così determinato sarà uno di quelli cercati: si può ripetere la costruzione all'infinito (cambiando A).

Corollario.
Si tracci FD, passante per F e perpendicolare alla retta AD. E' evidente che la linea formata dai punti P taglierà FD nel suo punto medio T; inoltre questa linea PPT si estende all'infinito, allontanandosi sempre più dalla retta FD (prolungata oltre F). (Cfr. Fig. 1)

Definizioni.
La linea PPT formata dai punti P si chiama ***parabola***.

Il punto F si chiama ***fuoco*** della parabola.
La retta DFO (Cfr. Fig.1) si chiama ***asse*** della parabola.
La linea PO uscente da uno dei punti P della parabola e perpendicolare all'asse si chiama ***ordinata relativa all'asse***.
Tutte le rette parallele all'asse e interne alla parabola si chiamano ***diametri***.
Una linea retta che incontri la parabola in un solo punto e non entri nella parte di piano interna alla curva si chiama ***tangente*** in quel punto

Proposizione I.
La parabola sia generata nel modo previsto dalle precedenti definizioni.
Io dico che il quadrato di una ordinata PO è uguale al rettangolo avente come dimensioni 2FD (il doppio di FD) e TO (parte dell'asse compresa tra il suo estremo T e il piede O dell'ordinata). (Cfr. Fig. 1).
Infatti, dalla generazione che abbiamo spiegato segue DO = AP = FP. Inoltre (teorema di Pitagora) $DO^2 = FP^2 = FO^2 + PO^2$. **(*)**

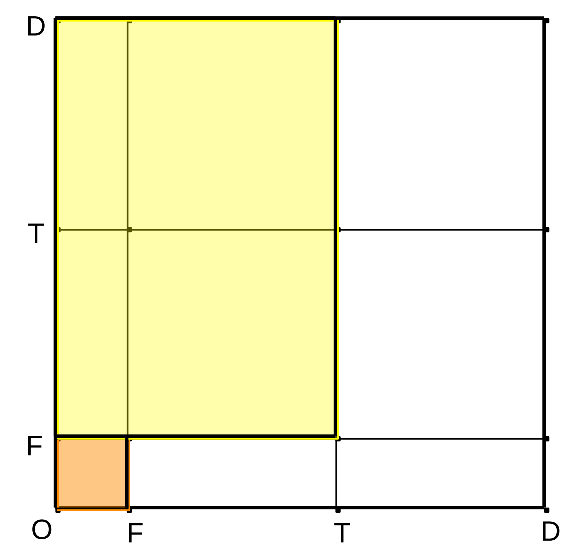

Fig. 2

Ma risulta anche (Cfr. Fig. 2):
$DO^2 = FO^2 + 2(OT \times DF)$. **(**)**
Uguagliando **(*)** e **(**)** ed eliminando la parte comune FO^2, rimane
$PO^2 = 2(OT \times DF)$, ***come volevasi dimostrare***

Corollario 1.
Appare evidente da ciò che si è provato che il quadrato di ogni ordinata PO è uguale a un rettangolo che ha un lato costante (pari ad doppio di FD) e l'altro lato uguale a TO (parte dell'asse compresa tra il vertice T e il piede dell'ordinata).

Definizione.
La linea uguale al doppio di FD si chiama ***parametro relativo all'asse.***

Corollario 2.
Si vede che il fuoco dista dal vertice dell'asse di un quarto del parametro relativo all'asse.

Corollario 3.
E’ inoltre chiaro che i quadrati di ogni ordinata stanno fra loro come le parti dell’asse comprese tra il vertice e i piedi delle medesime ordinate. Si tratta infatti di quadrati equivalenti a rettangoli aventi per base tali parti dell’asse e come altezza comune (costante) il parametro (relativo all’asse).

Proposizione II.

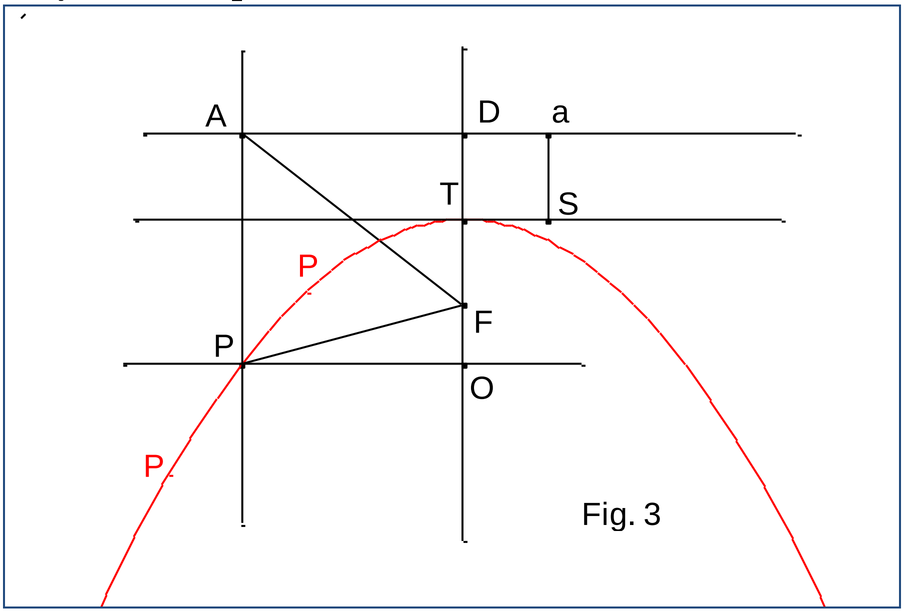

Fig. 3

La linea retta TS condotta per il punto T parallela a PO è tangente alla parabola proprio in T. (Fig. 3).
Supponiamo dapprima che tale retta incontri la parabola in un altro punto S.
Tracciamo la retta Sa parallela all’asse. Si avrà allora (cfr. generazione della curva) FS = Sa. Ma poiché FT = TD = Sa, segue che FS = FT: ciò è assurdo, perché nel triangolo rettangolo FTS l’ipotenusa FT è maggiore degli altri lati.
Supponiamo poi che TS si trovi all’interno della curva: in questo caso la parabola avrebbe punti fra Da e TS. Ciò non è possibile, quindi è vero quanto asserito dall’enunciato.

De la Hire dimostra poi alcune altre proprietà relative ai diametri della parabola e alle tangenti ad essa in un punto, che utilizza per studiare la curva (come diciamo noi ora) in “coniugazione obliqua”.
Mentre nelle proposizioni da noi tradotte le ordinate sono relative agli assi (e ad essi perpendicolari), nelle successive si giunge a considerare le ordinate (oblique) relative a un diametro (e parallele alla tangente alla parabola nell’origine del diametro stesso).

Può essere per noi utile riscrivere qui di seguito la tesi della proposizione I nel linguaggio attuale della geometria analitica.

Proposizione I

In essa si dimostra che (cfr. Fig.1): $\mathrm{PO}^2 = 2(\mathrm{OT} \times \mathrm{DF})$. **(§)**

Consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale con origine in T, asse x coincidente con l'asse TO della parabola, asse y tangente in T alla curva.

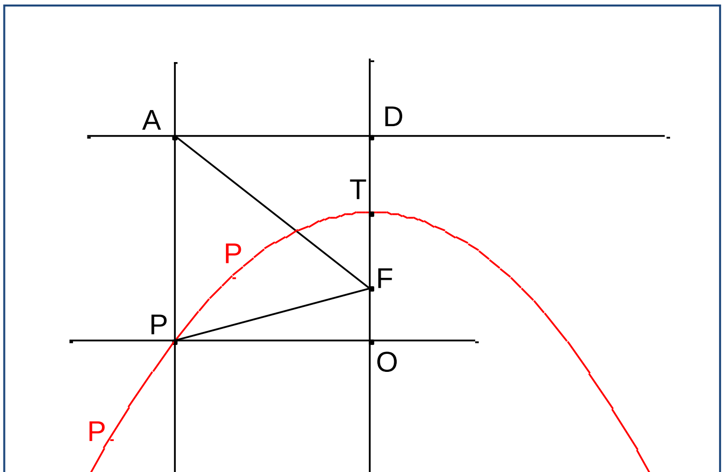

Fig. 1

Si ha: PO = y; OT = x; FD = p; parametro = 2p (per definizione).

La **(§)** si scrive allora: $\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{px}$.

Per avere il valore di y^2 nulla si deve aggiungere o togliere al rettangolo 2DF×OT = p×OT. Da ciò il nome di ***"parabola"***. (La parabola non ha ***"figura"***).

L'ELLISSE.

Generazione dell'ellisse.

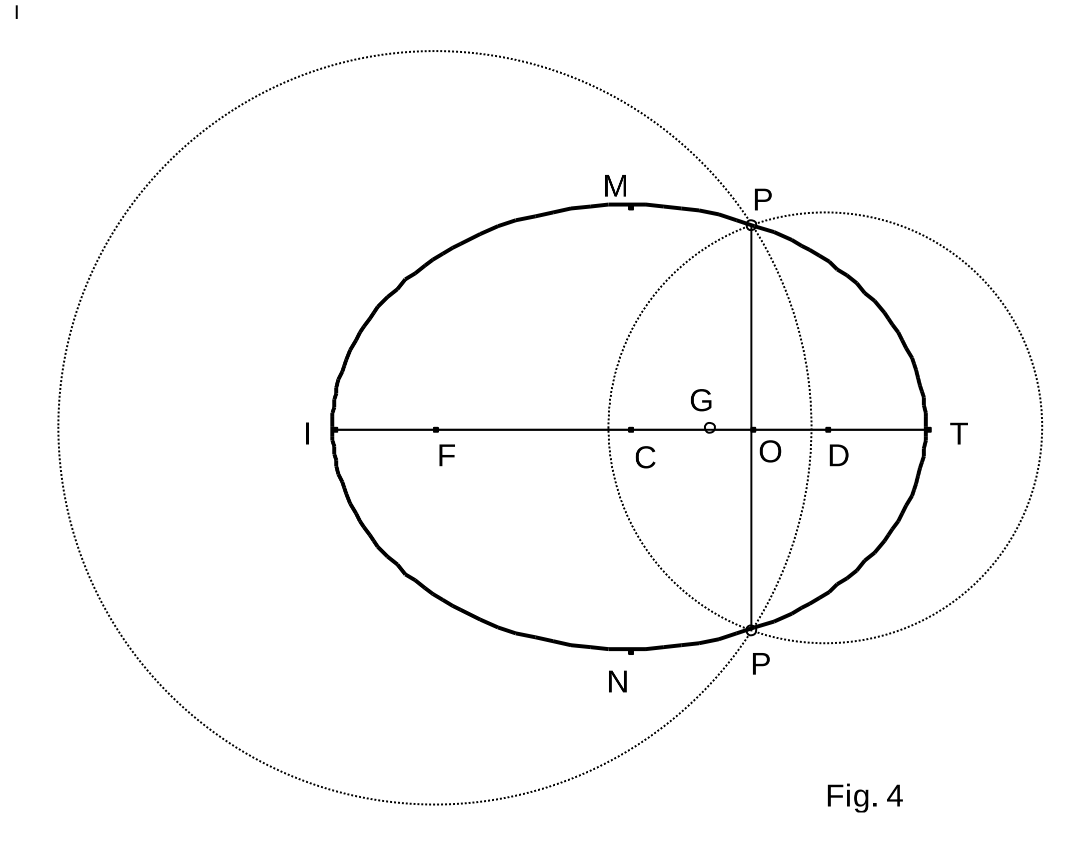

Fig. 4

Sia data su un piano una linea (retta) IT divisa in due parti uguali dal punto C; su questa stessa linea siano poi collocati i punti F, D da una parte e dall'altra di C e ad ugual distanza da C. Io dico che si possono trovare infiniti punti P tali che le due linee (rette) PF e PD, congiungenti P con i punti F e D, abbiano somma uguale a IT. (Cfr. Fig. 4).
Si divida IT in due parti scelte a piacere. Una di queste parti sia raggio di una circonferenza avente centro in F, l'altra sia invece raggio di una circonferenza avente centro in D. Queste circonferenza si intersecheranno in due punti P uno al di sopra, l'altro al di sotto della linea IT e ad uguale distanza da essa. La linea che li congiunge sarà perpendicolare a IT. In questo modo potrà essere trovato un numero infinito di punti P, come appunto si voleva.

Corollario.

E' evidente che la linea (curva) formata dai punti P passa per I e per T. Inoltre, questa linea PTPI rinchiude una parte di piano (è una linea chiusa).

Infine, tutte le linee (rette) come PP (cfr Fig. 4) perpendicolari a IT e limitate (da una parte e dall'altra di IT) dalla curva dei punti P, sono divise dalla linea IT, nel punto O, esattamente in due parti uguali.

Definizioni.

La curva PTPI si chiama ***ellisse***.
Il punto C è il ***centro*** della ellisse.
La linea retta IT si chiama ***asse maggiore***.
La linea retta NCM perpendicolare a IT, passante per il centro C, limitata dall'ellisse, si chiama ***asse minore***. (Cfr. Fig. 4)
I punti F, D si chiamano ***fuochi***.
Le linee rette condotte dai punti dell'ellisse perpendicolarmente agli assi si chiamano ***ordinate relative agli assi***. Ad esempio rette come PO (cfr. Fig. 4) sono ***ordinate relative all'asse maggiore IT***.
Tutte le rette passanti per il centro C e limitate dall'ellisse sono chiamate ***diametri***.
Una linea retta che incontra l'ellisse in un solo punto è chiamata ***tangente*** all'ellisse in quel punto.

Lemma.

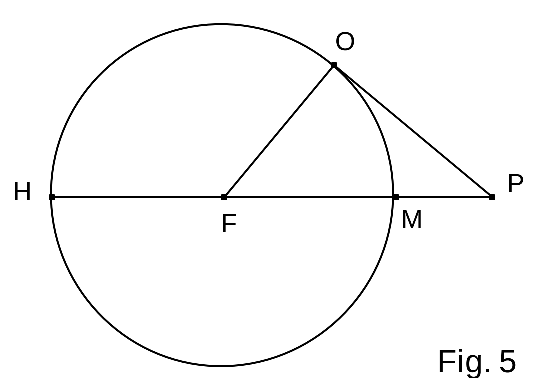

Fig. 5

In ogni triangolo rettangolo FOP, il rettangolo avente come dimensioni PH (somma dell'ipotenusa FP e di uno dei cateti FO) e MP (differenza tra l'ipotenusa FP e il medesimo cateto FO) è uguale al quadrato dell'altro cateto PO.
Prendendo il punto F come centro (cfr. Fig. 5) si descriva la circonferenza MOH avente raggio FO, e si prolunghi l'ipotenusa PF fino ad incontrare in H tale circonferenza. Il cateto PO sarà tangente alla circonferenza in O (infatti l'angolo FOP è retto). Quindi, per un noto teorema:
$\mathrm{PM} \times \mathrm{PH} = \mathrm{PO}^2$, ***come volevasi dimostrare.***

Proposizione I.

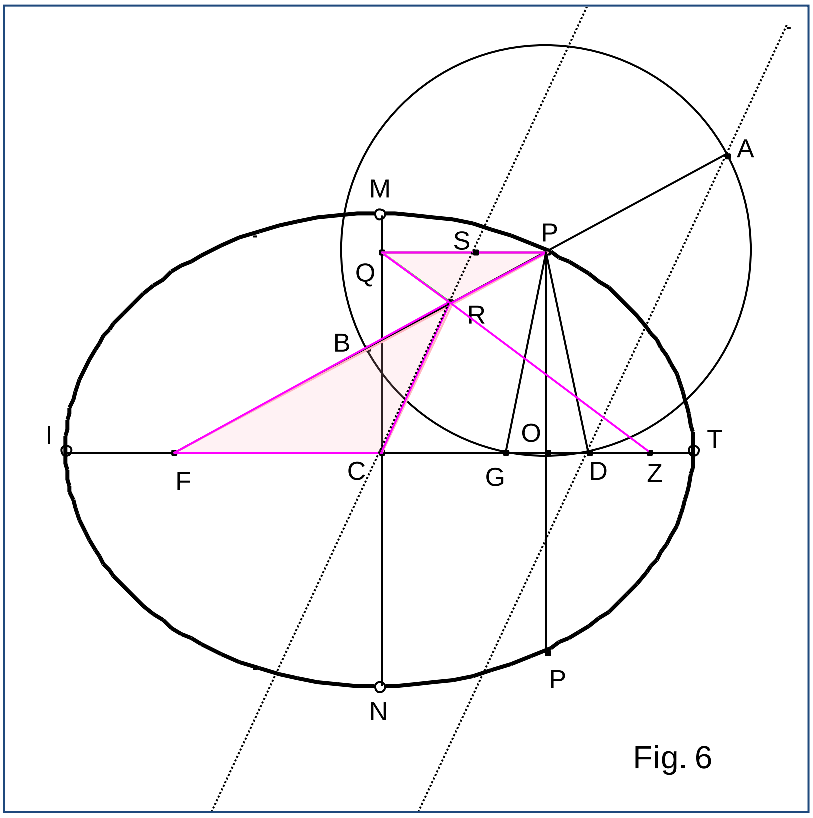

Fig. 6

Costruita l'ellisse col metodo precedentemente spiegato, io dico che il quadrato di una ordinata PO relativa all'asse maggiore IT sta al rettangolo formato da IO e OT (parti in cui l'asse maggiore è suddiviso dal piede dell'ordinata) come il rettangolo formato da IF ed FT (parti in cui l'asse maggiore è suddiviso dal fuoco F) sta al quadrato di IC o di CT (semiassi).

Cioè (cfr. Fig. 6):

$PO^2 : (IO \times OT) = (IF \times FT) : IC^2$ **($)**.

Prolungando FP, si prenda FA = IT (cfr. Fig. 6), e sia R il punto medio di FA. Con centro P e raggio PA = PD (D è l'altro fuoco dell'ellisse) si descriva la circonferenza ADB che incontrerà AF in B e IT in G e D, se i punti D e O non coincidono. (Se invece D ed O sono sovrapposti, lo saranno anche i tre punti D, O, G; e la circonferenza ADB sarà tangente in O a IT: noi tuttavia supponiamo per ora che i tre punti D, O, G siano distinti).

Osservando la circonferenza ADB si ricava subito (proprietà delle secanti) che FA × FB = FD × FG.

Da questa uguaglianza si deduce FA : FD = FG : FB (1)

Ricordiamo che FR = CT e FC = CD sono rispettivamente la metà di FA e FD. Inoltre CO è la metà di FG (infatti – cfr. sempre Fig. 6 – risulta

FG = FD−2OD = 2CD−2OD, CO = CD−OD) e RP è la metà di FB (infatti RP = FR−PA mentre FB = FR+RP−PA, sicché FB = 2FR−2PA).

Quindi dalla (1) si ricava la proporzione CT : CD = CO : RP (2) Componendo: CT : (CT + CD) = CO : (CO + RP), cioè:

CT : CO = (CT + CD) : (CO + RP).

Componendo ancora:

CT : (CT + CO) = (CT + CD) : (CT + CD +CO + RP) (3).

Osserviamo che: CT + CO = IO; CT + CD = ID; CT + CD + CO + RP =

= FR + RP + FC + CO= FP + FO.
La (3) si può allora scrivere: CT : IO = ID : (FP + FO) (4).
Riprendiamo la proporzione (2): CT : CD = CO : RP.
Scomponendo: CT : (CT – CD) = CO : (CO – RP), cioè:
CT : CO = (CT – CD) : (CO – RP).
Scomponendo ancora:
CT : (CT – CO) = (CT – CD) : (CT – CD – CO + RP) (5).
Osserviamo che: CT – CO = OT; CT – CD = DT; CT – CD – CO + RP =
= FR + RP – FC – CO = FP – FO.
La (5) si può allora scrivere: CT : OT = DT : (FP – FO) (6)
Moltiplicando membro a membro le proporzioni (4) e (6) si ricava:
$\mathrm{CT}^2 : (\mathrm{IO} \times \mathrm{OT}) = (\mathrm{ID} \times \mathrm{DT}) : (\mathrm{FP} + \mathrm{FO})(\mathrm{FP} - \mathrm{FO})$ (7). Ma per il lemma precedente $(\mathrm{FP} + \mathrm{FO})(\mathrm{FP} - \mathrm{FO}) = \mathrm{FP}^2 - \mathrm{FO}^2 = \mathrm{PO}^2$. Allora la (7) si può scrivere:
$\mathrm{CT}^2 : (\mathrm{IO} \times \mathrm{OT}) = (\mathrm{ID} \times \mathrm{DT}) : \mathrm{PO}^2$.
Quest'ultima relazione, tenuto conto del fatto che ID = FT e IF = DT, coincide con la **($)**. ***Come volevasi dimostrare***.
Se poi i punti D, G, O sono sovrapposti, vale la medesima dimostrazione, perché si avrà FG = FO = FD. Non cambia nulla.

Proposizione II.

Notazioni e ipotesi sono quelle della proposizione precedente. Io dico che il rettangolo ID×DT è uguale al quadrato di CM (metà dell'asse minore).
Supponiamo infatti (cfr. Fig. 6) che MC sia una ordinata. Per la precedente proposizione possiamo scrivere: $\mathrm{CT}^2 : (\mathrm{IC} \times \mathrm{CT}) = (\mathrm{ID} \times \mathrm{DT}) : \mathrm{MC}^2$.
Ma poiché (IC×CT) = CT^2 , è anche (ID×DT) = $\mathrm{MC}^2 =$ (IF×FT).

Come volevasi dimostrare.

Proposizione III.

Sia data una ellisse (cfr. sempre Fig. 6: vengono mantenute le notazioni e le ipotesi utilizzate nelle precedenti proposizioni). Io dico che il quadrato dell'asse minore NM sta al quadrato dell'asse maggiore IT come il quadrato di una ordinata PO relativa all'asse maggiore sta al rettangolo IO×OT delle parti di tale asse maggiore individuate dal piede della ordinata.
Per la Proposizione I, il quadrato di CT sta al rettangolo ID×DT (uguale, per la Proposizione II, al quadrato di CM) come il rettangolo IO×OT sta al quadrato di PO.
Ma il quadrato di IT è il quadruplo del quadrato di CT, e anche il quadrato di N M è il quadruplo del quadrato di CM.
Possiamo dunque scrivere: $\mathrm{IT}^2 : \mathrm{NM}^2 = (\mathrm{IO} \times \mathrm{OT}) : \mathrm{PO}^2$. ***Come volevasi dimostrare.***

Proposizione IV.

Io dico inoltre che il quadrato di PQ (ordinata relativa all'asse minore) sta al rettangolo NQ×QM (formato dalle parti dell'asse minore individuate dal piede Q dell'ordinata) come il quadrato dell'asse maggiore IT sta ad quadrato dell'asse minore NM. (Cfr. ancora Fig. 6).
Osserviamo intanto che $(\mathrm{IO} \times \mathrm{OT}) = \mathrm{CT}^2 - \mathrm{CO}^2$. In base alle proposizioni precedenti possiamo allora scrivere:
$\mathrm{CT}^2 : \mathrm{CM}^2 = (\mathrm{CT}^2 - \mathrm{CO}^2) : \mathrm{PO}^2$. Invertendo i medi e scomponendo:
$\mathrm{CT}^2 : (\mathrm{CT}^2 - \mathrm{CT}^2 + \mathrm{CO}^2) = \mathrm{CM}^2 : (\mathrm{CM}^2 - \mathrm{PO}^2)$. Da questa, invertendo ancora i medi e osservando che $\mathrm{CM}^2 - \mathrm{PO}^2 = (\mathrm{CM} + \mathrm{PO})(\mathrm{CM} - \mathrm{PO}) = = \mathrm{NQ} \times \mathrm{QM}$, si ricava:
$\mathrm{IT}^2 : \mathrm{NM}^2 = \mathrm{CO}^2 : (\mathrm{NQ} \times \mathrm{QM})$ cioè $\mathrm{IT}^2 : \mathrm{NM}^2 = \mathrm{PQ}^2 : (\mathrm{NQ} \times \mathrm{QM})$, ***come volevasi dimostrare***.

Definizioni.

1. Una terza proporzionale rispetto ai due assi si chiama **parametro** relativo all'asse che è il primo termine della proporzione. Ad esempio (cfr. Fig. 7) se si costruisce una linea YT in modo che sia valida la proporzione IT : NM = NM : YT, questa linea YT è il parametro relativo all'asse maggiore IT. Analogamente per l'asse minore.

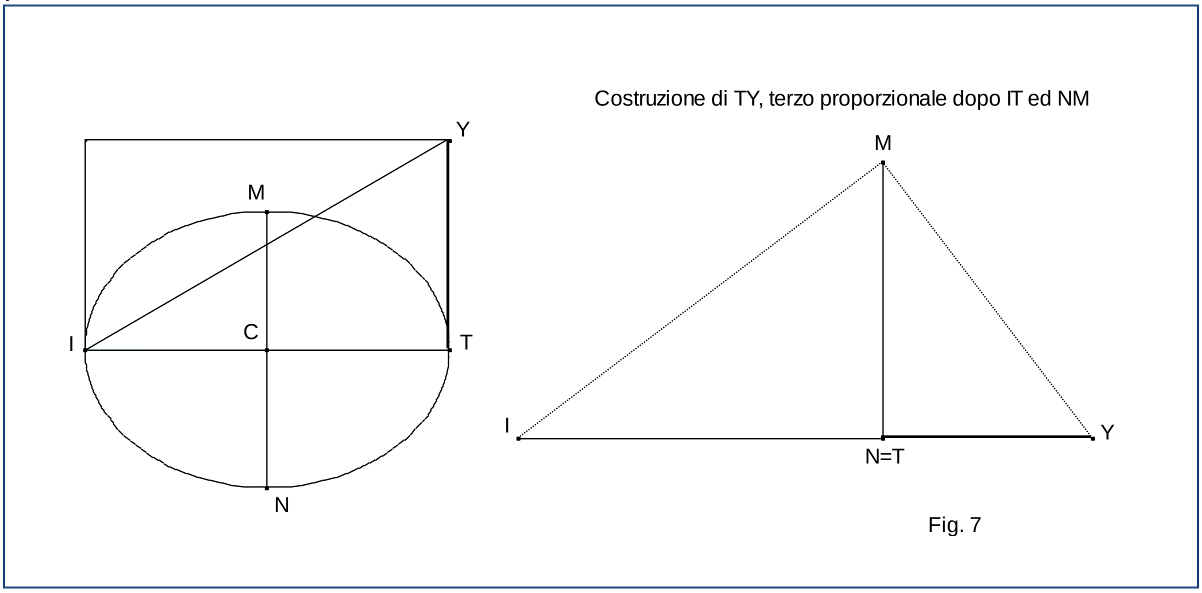

Fig. 7

2. Si chiama **figura** di un asse il rettangolo che ha come lati tale asse e il parametro ad esso relativo. Così ad esempio la figura dell'asse maggiore IT è il rettangolo IT×YT.

Corollario.

E' evidente che il quadrato di un asse è uguale alla figura dell'altro asse.

Proposizione V.

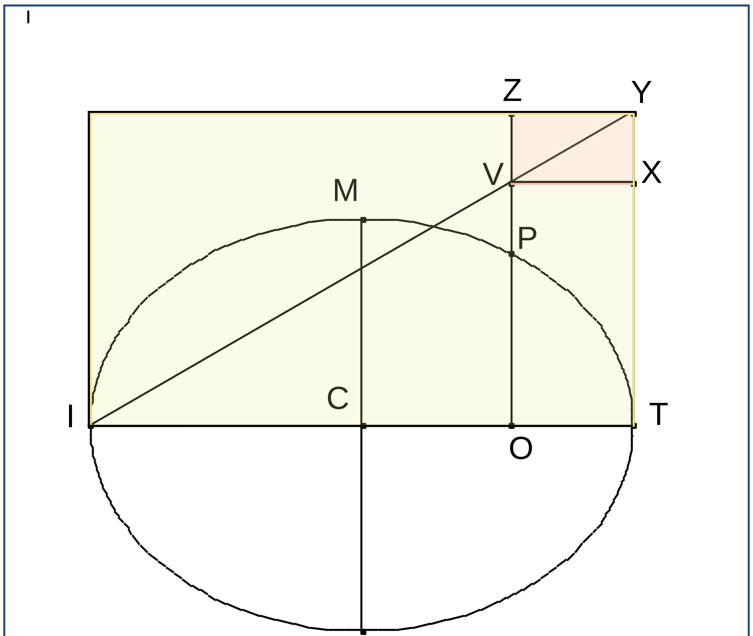

Fig. 8

Sia data una ellisse. (Cfr. Fig. 8). Il quadrato di una ordinata relativa a un asse (consideriamo per esempio l'ordinata PO relativa all'asse IT) è uguale a un rettangolo (OTXV) applicato al parametro (TY) di tale asse avente come altezza la parte OT dell'asse medesimo compresa tra il piede O della ordinata PO e l'estremo T dell'asse; tale rettangolo manca di una parte rettangolare VXYZ simile alla figura IT×YT e similmente disposta rispetto ad essa.
Le proposizioni III e IV ci consentono di scrivere:
$NM^2 : IT^2 = PO^2 : (IO \times OT)$. Per definizione di parametro:

$NM^2 = IT \times YT$, da cui : $NM^2 \times IT = IT^2 \times YT$ quindi

$NM^2 : IT^2 = YT : IT$.
Si ha inoltre: YT:IT = VO:IO = (VO×OT):(IO×OT).
Confrontando le ultime proporzioni scritte si ricava infine:
$PO^2 : (IO \times OT) = (VO \times OT) : (IO \times OT)$, da cui si deduce immediatamente
$PO^2 = (VO \times OT)$. Ma $(VO \times OT)$ (cfr. Fig. 8) è il rettangolo (OTXV) che, applicato al parametro (TY), manca della parte rettangolare VXYZ simile alla figura IT×YT e similmente disposta rispetto ad essa. ***Ciò appunto si voleva provare***.

Nelle proposizioni successive, De La Hire prende in considerazione ulteriori proprietà della curva che coinvolgono anche le tangenti ad essa in un punto; introduce inoltre il concetto di diametri coniugati, ed estende le proprietà caratteristiche dell'ellisse enunciandole in coniugazione obliqua

Per una migliore comprensione del testo tradotto, può essere a noi utile riscrivere qui di seguito, nel linguaggio della geometria analitica contemporanea, il contenuto di alcune delle precedenti proposizioni.

Proposizione I

(Si tengano presenti le Fig. 4, 6 e la costruzione dell'ellisse proposta da De La Hire).
Sistema cartesiano di riferimento: origine in C, assi x e y sovrapposti rispettivamente a IT e NM (assi della ellisse).
Si ha: PO = y; CO = x; IC = a; MC =b; IO = x + a; OT = a – x;
IF = $\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$; FT = $\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$.
La proporzione **($)** (tesi del teorema) si scrive quindi:
$y^2:(a+x)(a-x)=\left[\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\right]:a^2$, cioè:
$y^2:(a^2-x^2)=b^2:a^2$
ossia, con semplici calcoli: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (**#**)

Proposizione III.

(Cfr. sempre le Fig. 4,6; il sistema cartesiano di riferimento è il medesimo utilizzato per la proposizione I).
Si ha: IT = 2a; NM = 2b; CO = x; PO = y; IO = x + a; OT = a – x.
La proporzione $IT^2:NM^2=(IO\times OT):PO^2$ (tesi della proposizione III) si scrive:
$4a^2:4b^2=(a+x)(a-x):y^2$; si riottiene, con semplici calcoli, la (**#**).

Proposizione IV.

(Cfr. sempre le Fig. 4,6. Assi cartesiani di riferimento: origine in C, asse x sovrapposto a NM, asse y sovrapposto a IT).
Si ha: IT = 2a; NM = 2b; CQ = x, PQ = y; NQ = x + b; QM = b – x.
La proporzione $IT^2:NM^2=PQ^2:(NQ\times QM)$ (tesi della proposizione IV) si scrive quindi: $4a^2:4b^2=x^2:(b+y)(b-y)$, da cui:
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, analoga alla (**#**), ma con gli assi scambiati.

Proposizione V.

(Cfr. Fig. 8. Assi cartesiani di riferimento: origine in C, assi x e y sovrapposti rispettivamente a IT e NM).

Si ha: PO = y; IT = 2a; NM = 2b; OT = a – x; TY = OZ = p (parametro); OV = $\frac{p(x+a)}{2a}$ (dai triangoli simili YIT, VIO); p = $\frac{2b^2}{a}$ (per definizione);
VZ = p – OV = XY = $\frac{p(a-x)}{2a}$.
La relazione $PO^2 = OV \times OT = (p - VZ)OT$ si può quindi scrivere:

$y^2 = \frac{p(a+x)}{2a}(a-x) = \frac{2b^2}{2a^2}(a^2 - x^2)$ coincidente ancora con (**#**).

Per avere il valore di y^2 bisogna quindi togliere dal rettangolo TY×OT =
= OZ×OT = p×OT la parte rettangolare VZ×OT = VZ×VX, simile alla ***"figura"*** della curva***.*** Da ciò il nome di ***"ellisse".***

L’IPERBOLE.

Generazione dell’iperbole.

Sia data su un piano una linea retta IT che il punto C divida in due parti uguali; sulla medesima linea, prolungata da entrambe le parti, si prendano poi i punti F, D equidistanti da C (cfr. Fig. 9).

Io dico che è possibile trovare un qualsiasi numero di punti come P (oppure p) tali che la linea retta PF superi sempre PD di una lunghezza uguale a IT (oppure che pD

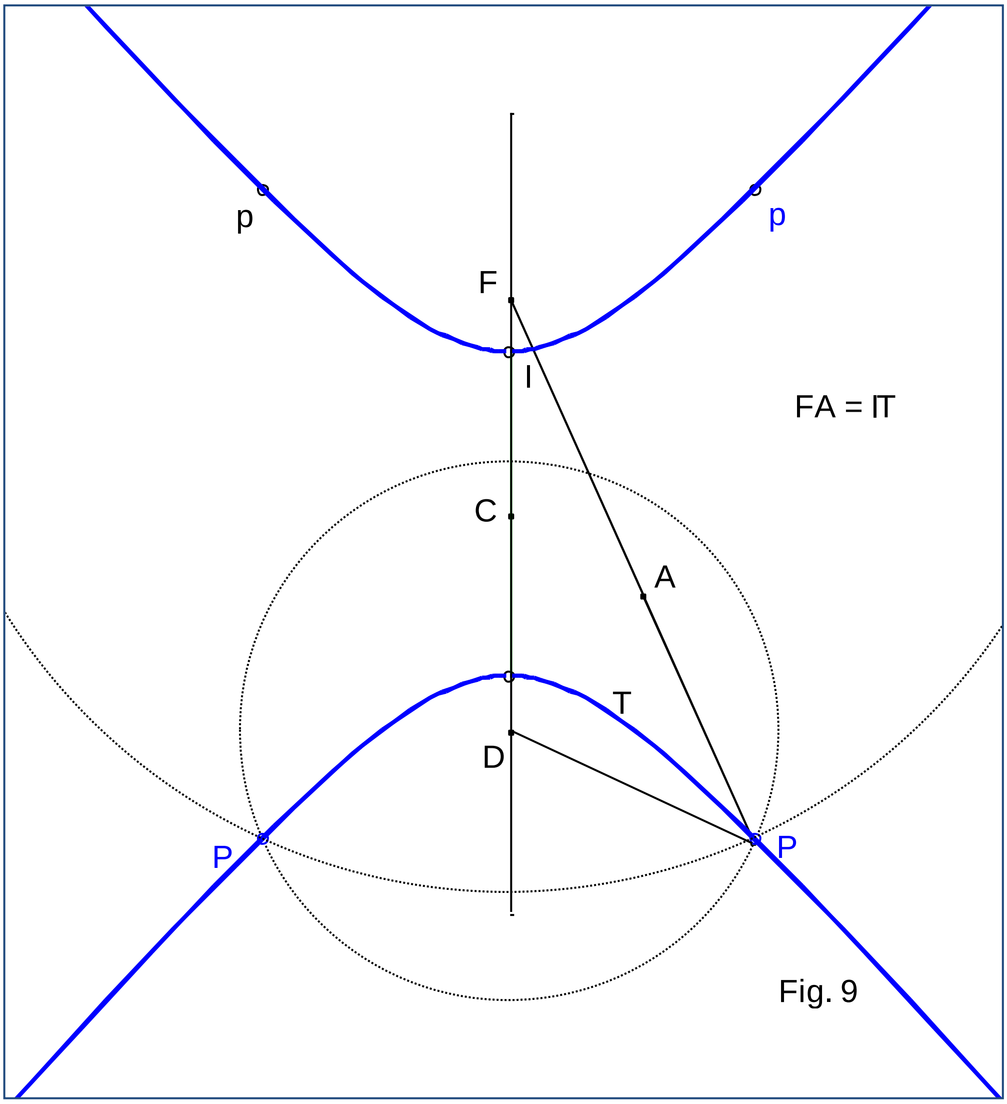

Fig. 9

superi sempre pF della medesima lunghezza IT).

Se prendiamo FP di una lunghezza arbitraria purché maggiore di FT, la differenza DP = FP – IT sarà maggiore o (al minimo) uguale a DT(=FI). Perciò, se il punto F è centro di una circonferenza di raggio FP, e D è centro di un’altra circonferenza di raggio DP, queste circonferenze si incontreranno necessariamente in due punti P situati da parti opposte rispetto alla linea IT oppure saranno fra loro tangenti in T. Si troveranno tanti punti P diversi tra loro quante saranno le linee FP inizialmente scelte: e allo stesso modo si costruirà un numero arbitrario di punti p (cfr. Fig. 9).

Corollario.

Appare evidente dalla generazione precedente che la linea retta congiungente i punti P (oppure p) risultanti dall'intersezione delle medesime circonferenze, sarà perpendicolare a FD e sarà inoltre tagliata da FD in due parti uguali. E' inoltre evidente che i punti P formeranno una linea curva passante per T, mentre i punti p ne formeranno un'altra passante per I. Si vede anche che le linee PTP e pIp non racchiudono alcuno spazio limitato, né se le si considera singolarmente né se le si considera insieme. Inoltre, esse si prolungano all'infinito allontanandosi sempre dalla retta IT e dal punto C, la prima da un lato, la seconda dall'altro.

Definizioni. (Cfr. Fig. 10)

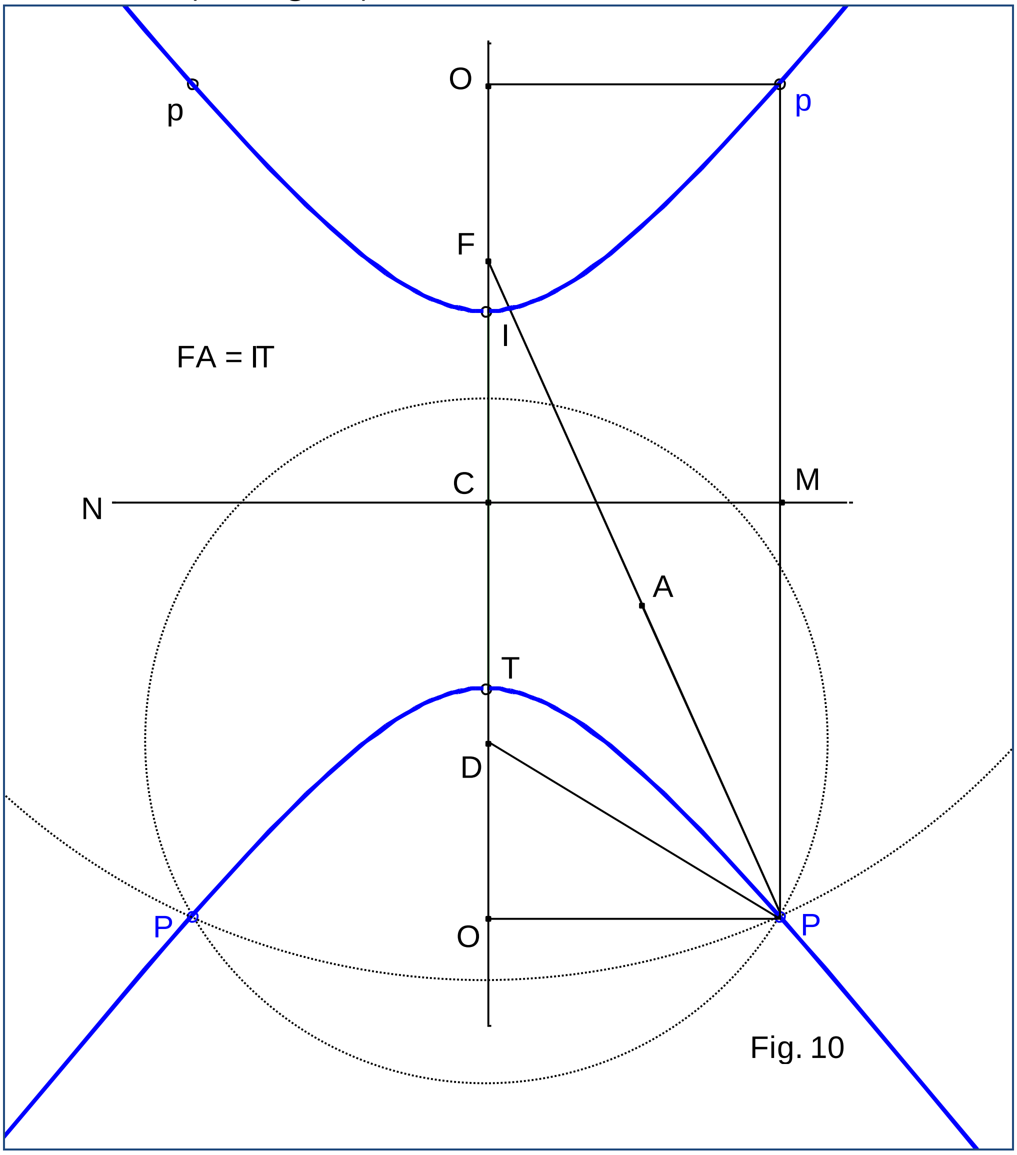

Fig. 10

1. Ognuna delle linee PTP, pIp (considerate separatamente) si chiama **iperbole**; se le consideriamo insieme si chiamano **iperboli opposte**.
2. Il punto C si chiama **centro** dell'iperbole, o delle iperboli opposte.
3. La linea retta IT (limitata da I e T oppure prolungata) si chiama **asse determinato.**
4. La linea retta NCM passante per il centro C e perpendicolare a IT, si chiama **asse indeterminato.**
5. I punti F, D si chiamano **fuochi**.
6. Le linee rette come PO condotte dai punti di una iperbole o delle iperboli opposte perpendicolarmente a uno degli assi, si chiamano **ordinate relative a tale asse.**
7. Tutte le linee rette che passano per il centro si chiamano **diametri**: **determinati** se incontrano le iperboli, **indeterminati** se non le incontrano.
8. Una linea retta che incontra l'iperbole in un solo punto senza attraversarla, si chiama **tangente** alla curva in tale punto.

Proposizione I.

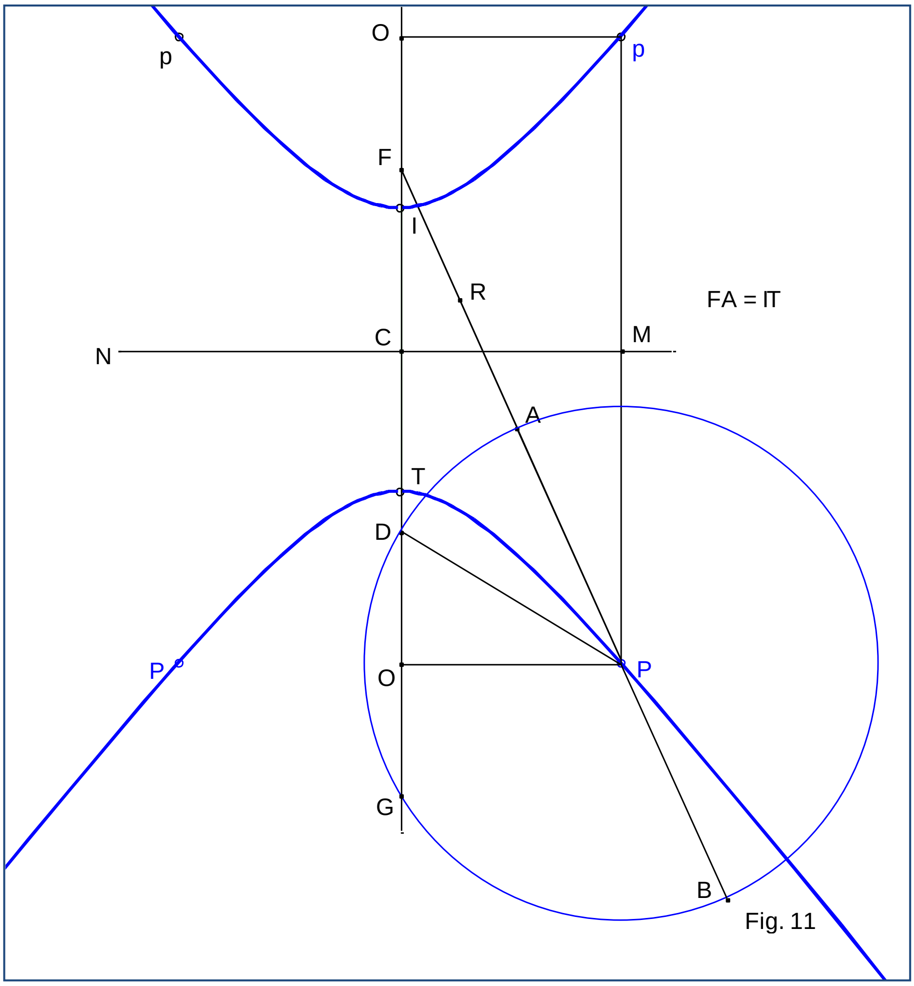

Fig. 11

Costruita l'iperbole, io dico che il quadrato di una ordinata PO relativa all'asse determinato IT sta al rettangolo IO×OT – formato dalle parti di tale asse comprese tra il piede O dell'ordinata e le estremità I, T dell'asse medesimo (non prolungato) – come il rettangolo IF×FT (oppure il rettangolo TD×DI ad esso uguale) sta al rettangolo IC×CT (che è il quadrato di CT). (Cfr. Fig. 11).
Si deve dunque dimostrare che:
$PO^2 : (IO \times OT) = (ID \times DT) : CT^2$
(£)

Si prolunghi FP fino a B, in modo che sia PB = PD; con centro P e raggio PD si descriva la circonferenza BGD intersecante FP in A, e IT in D e G; dalla costruzione utilizzata per l'iperbole si ricava che FA = IT; sia R il punto medio di FA. Dalla circonferenza ADGB si deduce che il rettangolo FA×FB è uguale al rettangolo FD×FG, quindi FA : FD = FG : FB.
Prendendo le metà di ognuno dei termini di quest'ultima proporzione si può inoltre scrivere FR : CD = CO : RP, o anche (FR = CT):
CT : CD = CO : RP. (**1**)
Componendo: CT : (CT + CD) = CO : (CO + RP), cioè
CT : CO = (CT + CD) : (CO + RP). Componendo ancora:
CT : (CT + CO) = (CT + CD) : (CT + CD + CO + RP). (**2**)
Ma è: CT + CO = IO, CT + CD = ID, CT + CD + CO + RP = FR + FC + CO + RP = FP + FO.
Dalla (**2**) si ricava perciò:
CT : IO = ID : (FP + FO). (**3**)
Riprendiamo la proporzione (**1**): CT : CD = CO : RP. Scomponendo:
CT : (CD – CT) = CO : (RP – CO), cioè
CT : CO = (CD – CT) : (RP – CO). Scomponendo ancora:
CT : (CO – CT) = (CD – CT) : (RP – CO – CD + CT) (**4**).
Siccome CO – CT = OT, CD – CT = DT, e infine
RP – CO – CD + CT = RP – CO – FC + FR = FP – FO, dalla (**4**) si ricava:
CT : OT = DT : (FP – FO) (**5**).
Moltiplichiamo membro a membro le (**3**) e (**5**):
$CT^2 : (IO \times OT) = (ID \times DT) : (FP^2 - FO^2)$. Applicando il **Lemma** che precede la **Proposizione I** relativa all'ellisse: $(FP^2 - FO^2) = PO^2$. Dall'ultima proporzione scritta si ricava allora:
$CT^2 : (IO \times OT) = (ID \times DT) : PO^2$ che coincide con la **(£)**, ***come volevasi dimostrare.***
Se la circonferenza BDA è tangente in D a IT (oppure se il punto O coincide con il punto D) la dimostrazione si svolge allo stesso modo, ma risulta più semplice, perché molte grandezze che erano diverse diventano uguali.

Corollario

E' evidente che i quadrati delle ordinate relative a un asse stanno fra loro come i rettangoli formati dalle parti di tale asse comprese fra gli estremi dell'asse stesso e il piede delle ordinate relative al medesimo asse.

Proposizione II.

La linea retta Pp (interna alle iperboli opposte) parallela all'asse determinato, incontra l'asse indeterminato NM in un punto M che la divide esattamente in due parti uguali. (Cfr. sempre Fig. 11)
Si tratta di una conseguenza evidente della generazione da noi scelta per l'iperbole. Infatti, se si traccia la circonferenza di centro D con raggio FP, e quella di centro F con raggio DP, queste due circonferenze si incontrano nel punto p. Quindi, **pO** essendo l'ordinata relativa all'asse IT, si avrà **pO=PO**, e anche pM sarà uguale a PM.

Definizione.

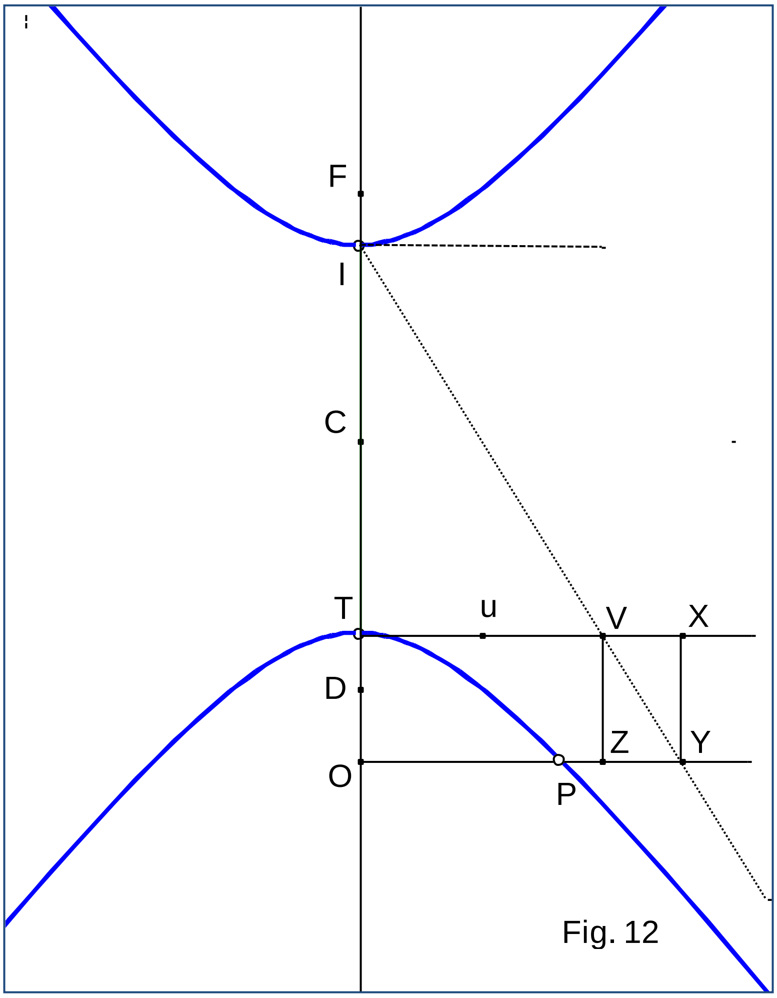

Fig. 12

Se si determina una linea Tu tale che $CT^2 : (ID \times DT) = CT : Tu$; la linea TV = 2Tu si chiama **parametro** dell'asse determinato IT. (Cfr. Fig. 12).
Il rettangolo IT×TV (avente come dimensioni l'asse It e il suo parametro) si chiama la **figura** di tale asse.

Corollario.

E' evidente che la figura IT×TV è uguale a quattro volte il rettangolo ID×DT. Dalla definizione di parametro si ricava infatti che: CT×Tu =ID×DT. Inoltre: $IT : TV = IT^2 : 4(ID \times DT)$.

Proposizione III.

Il quadrato di una ordinata PO relativa all'asse determinato IT è uguale al rettangolo OTXY applicato al parametro TV, avente come altezza la parte TO dell'asse compresa

fra il suo estremo T e il piede O dell'ordinata; questo rettangolo eccede di una parte rettangolare YXVZ simile alla figura e similmente disposta rispetto ad essa. (Cfr. sempre Fig. 12).
Per la **proposizione I** possiamo scrivere:
$CT^2 : (ID \times DT) = (IO \times OT) : PO^2$.
Per **definizione di figura**: $CT^2 : (ID \times DT) = IT^2 : (IT \times TV) = IT : TV$.
Confrontando con la precedente proporzione:
$IT : TV = (IO \times OT) : PO^2$ **(&)**.
Si ha anche: $(IO \times OT) : (YO \times OT) = IO : YO =$ (si osservino in Fig. 12 i triangoli simili IOY, ITV) = $IT : TV$.
Confrontiamo queste ultime uguaglianze con la **(&)**. Si ricava subito:
$(IO \times OT) : PO^2 = (IO \times OT) : (YO \times OT)$. Ma allora:
$(YO \times OT) = PO^2$, ***come volevasi dimostrare***.

Molte altre proprietà dell'iperbole (e delle iperboli opposte) sono ricavate da De la Hire nelle proposizioni successive, nelle quali giocano un ruolo importante diametri, tangenti alla curva in un punto proprio, e asintoti; come nel caso della ellisse, anche questa curva viene poi studiata in coniugazione obliqua.
Riscriviamo ora le proprietà dimostrate nelle precedenti proposizioni utilizzando il linguaggio attuale della geometria analitica.

Proposizione I.

In essa viene dimostrato che $PO^2 : (IO \times OT) = (ID \times DT) : CT^2$ **(£)**.
(Cfr. Fig. 11).
Si assuma un riferimento cartesiano (ortogonale) avente origine in C, asse x sovrapposto all'asse determinato IT della iperbole, asse y coincidente con l'asse indeterminato della iperbole.
Allora: PO = y; CO = x; CD = b; CT = a; IT = 2a; TO = x – a; IO = x + a; ID = b + a; DT = b – a.
Quindi la **(£)** si scrive: $y^2 : (x^2 - a^2) = (b^2 - a^2) : a^2$, ossia, con semplici calcoli:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$ **(¤)**

Proposizione III.
Il riferimento cartesiano coincide con quello utilizzato per la precedente proposizione. Si ha quindi (cfr. Fig. 12):
PO = y; CT = a; TO = x – a; TV = 2Tu = p = $2\frac{b^2 - a^2}{a}$ (per definizione di parametro); YO = $\frac{(x+a)(b^2 - a^2)}{a^2}$ (dai triangoli simili IOY, ITV); ZY =

$= VX = \frac{p(x-a)}{2a}$ (dai triangoli simili YXV, ITV).
Perciò la relazione $PO^2 = (YO \times TO) = (p + ZY) \times TO$ (tesi della proposizione III) si scrive:
$y^2 = \frac{(x^2-a^2)(b^2-a^2)}{a^2}$, che (come si può verificare con semplici calcoli) coincide con la **(¤)**.
Per avere il valore di y^2 bisogna quindi aggiungere al rettangolo
TO×OZ = TV×ZV = p×OT la parte rettangolare VZ×ZY = VX×XY =
= ZY×TO, simile alla ***"figura"*** della curva**.** Da ciò il nome di ***"iperbole".***
