Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo n°10

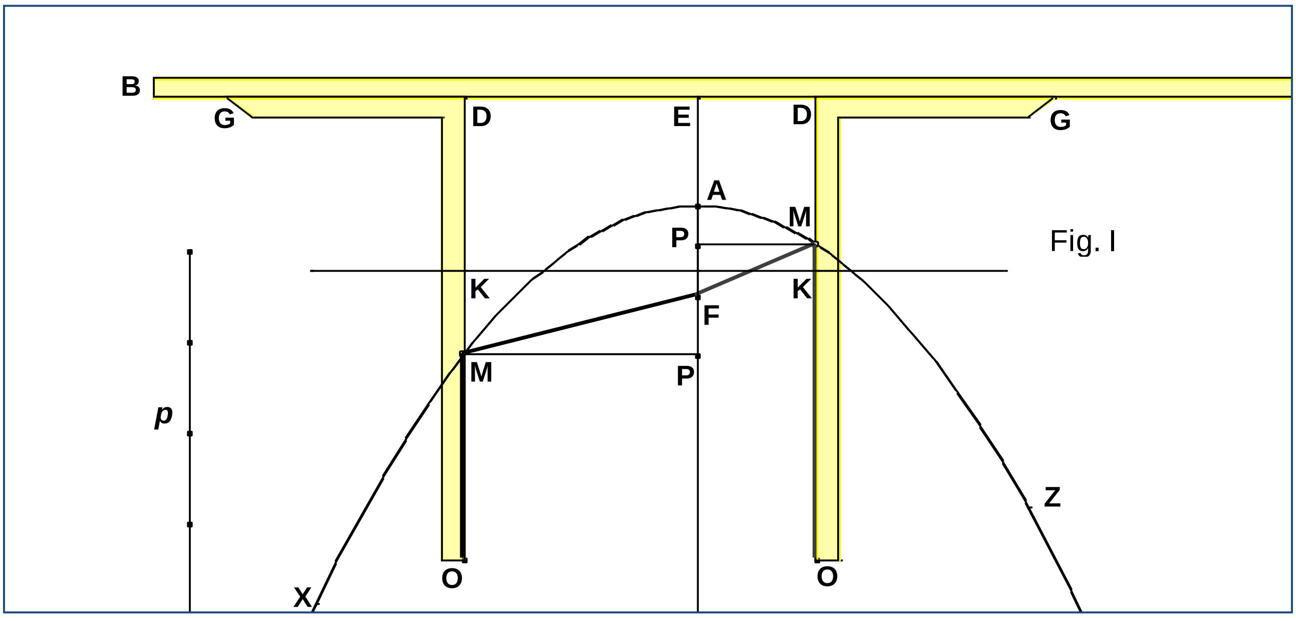
DE L'HOSPITAL

(TRAITE ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES). LIBRI I – III.

Il trattato sulle coniche di De L'Hospital, rimase manoscritto fino alla morte dell'autore (avvenuta nel 1704): fu pubblicato nel 1707, ed ebbe in seguito numerose altre edizioni (noi abbiamo utilizzato quella del 1720). Per i pregi didattici dell'esposizione (notevole l'equilibrio tra metodi sintetici e metodi analitici) esercitò grande influenza lungo tutto il XVIII secolo.
*Nei tre libri iniziali, De L'Hospital introduce le coniche attraverso gli strumenti a filo descritti da Kepler (cfr. **Fascicolo 9**), servendosi quindi delle loro proprietà focali. Ne ricava poi le equazioni (precisamente quelle che noi chiamiamo equazioni canoniche) e alcune proprietà, seguendo e perfezionando i procedimenti sviluppati da Descartes nella sua "Geometria".*
Traduciamo qui di seguito la prima parte di ognuno di questi tre libri.
*(Una analisi del **libro VII** è stata presentata nel **Fascicolo 6**).*

LIBRO I. (Sulla parabola)

Definizioni (Cfr. Fig. I)



1. Una riga BC e una squadra GDO siano collocate su un piano in modo che uno dei lati (DG) della squadra giaccia lungo la riga. Si prenda un filo FMO di lunghezza uguale all'altro lato (DO) della squadra: un estremo del filo sia attaccato alla estremità O del lato DO, l'altro estremo sia invece fissato a un punto F scelto a piacere sul medesimo piano in cui si trovano riga e squadra (dalla medesima parte in cui si trova la squadra rispetto alla riga).
   Se si fa scivolare il bordo DG della squadra lungo la riga BC, e nello stesso tempo, mediante uno stilo M, si tiene sempre il filo teso in modo che la sua parte MO sia in stretto contatto con il lato OD della squadra (come se vi fosse incollato): allora la curva AMX descritta dallo stilo M durante questo movimento è un arco di parabola. (animazione)
   Se si rovescia la squadra collocandola dall'altra parte rispetto al punto fisso F, si descriverà allo stesso modo un altro arco AMZ della medesima parabola. La linea XAZ sarà un'unica curva, che chiameremo appunto ***parabola***.
2. La retta BC su cui giacciono (nel piano assegnato) il bordo inferiore della riga immobile BC e il lato DG della squadra GDO si chiama ***direttrice***.
3. Il punto fisso F del piano si chiama ***fuoco*** della parabola.
4. Se dal punto fisso F si traccia una perpendicolare FE alla direttrice BC che incontri la parabola in A, la retta AF (prolungata indefinitamente dalla parte in cui si trova F) si chiama ***asse*** della parabola.
5. La linea p uguale al quadruplo di AF si chiama ***parametro*** relativo all'asse.
6. Tutte le linee MP condotte da un punto generico M della parabola perpendicolarmente all'asse, si chiamano ***ordinate*** relative all'asse.
7. Tutte le rette MO condotte da un punto generico M della parabola parallelamente all'asse, si chiamano ***diametri*** della parabola.
8. Una linea retta che incontri la parabola soltanto in un punto e che, prolungata da entrambe le parti, non entri mai nello spazio interno alla curva, ma resti sempre all'esterno, si chiama **tangente** in quel punto alla parabola.

Corollari (Cfr. Fig. I)

1. Segue dalla definizione di parabola che, se si traccia da un punto generico M della curva una linea (retta) MF che lo congiunga col fuoco, e una seconda linea MD perpendicolare alla direttrice BC, risulta sempre MF = MD. Infatti se si toglie dal lato OD della squadra e dal filo OMF (uguale al lato OD: ***cfr. def. 1***) la parte comune OM, si vede subito che le parti residue MD ed MF sono in ogni caso uguali fra loro.
2. Da ciò risulta evidente che se si traccia una retta qualunque KK parallela alla direttrice BC, e se per un punto generico M della parabola si fa passare una perpendicolare MK a quella retta (KK) e inoltre si congiunge M col fuoco mediante la linea MF: allora la differenza o la somma KD di MK ed MF sarà sempre costante (qualunque sia M). Precisamente sarà costante la differenza

quando M si trova al di sotto di KK, la somma quando M si trova al di sopra di KK.

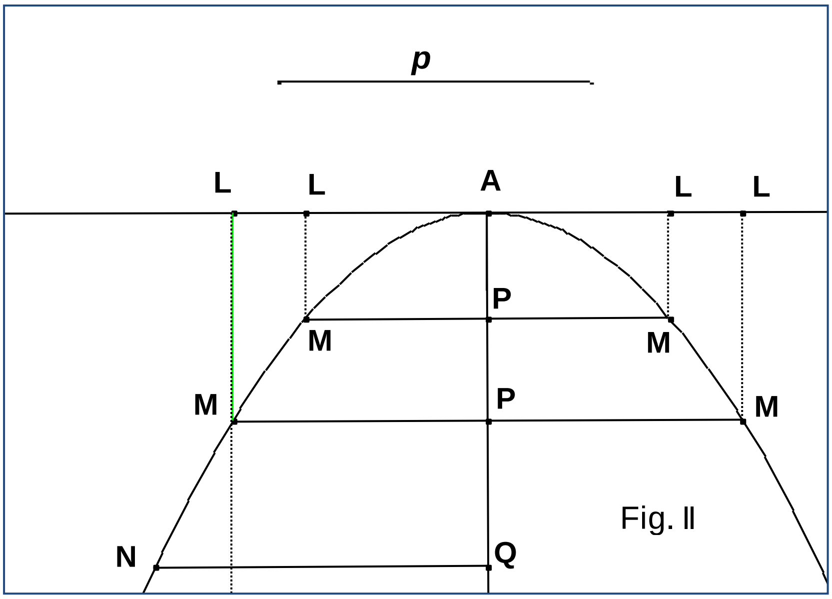
3. E’ evidente che FE viene divisa in due parti uguali dalla parabola nel punto A. Nel caso infatti che M coincida con A, MF coincide con AF e MD con AE, Sarà dunque AF = AE in quanto (***cfr. cor. 1***) è sempre (qualunque sia il punto M sulla parabola) MF = MD.
4. Da quanto detto si ricava come sia possibile descrivere una parabola XAZ quando siano assegnati l’asse AP (di cui A è l’origine) e il parametro p. Infatti: si prendano sull’asse AP, da una parte e dall’altra del punto A, le parti AF, AE eguali ognuna a un quarto del parametro; dal punto E si tracci una perpendicolare BC (illimitata) a FE; si appoggi il bordo inferiore di una riga su questa retta BC che serve da direttrice; infine, per mezzo di una squadra ODG e di un filo FMO uguale al lato OD della squadra, (dopo aver fissato al fuoco F uno dei capi del filo e all’estremo O del medesimo lato OD l’altro capo), si descriverà la parabola richiesta XAZ come spiegato nella ***def. 1***. E’ evidente che quanto più il lato OD della squadra e il filo OMF (uguali fra loro) saranno lunghi, tanto maggiore sarà la porzione di parabola descritta: che quindi si potrà aumentare a piacere, allungando in egual misura OD e OMF.
5. Se da un punto qualsiasi M della parabola si traccia una ordinata MP relativa all’asse, e la linea MF che congiunge M col fuoco, si ha sempre MF = AP + AF. Infatti MF = MD = AP + AE, ed è
(***cfr. cor. 3***) AF = AE.

PROPOSIZIONE 1 (Cfr. Fig. I)

Teorema: Il quadrato di una qualunque ordinata *MP* relativa all’asse *AP* è uguale al rettangolo formato dal parametro *p* e dalla parte *AP* dell’asse compresa fra l’origine *A* e il piede *P* dell’ordinata.
Bisogna dunque dimostrare: $MP^2 = p \times AP$.
Si ponga $AF = m$ (quantità nota, essendo $p = 4m$: ***cfr. def. 5***), $AP = x$,
$PM = y$ (quantità indeterminate). Si ha (***cfr. cor. 5***) $MF = m + x$,
$PF = x - m$ oppure $PF = m - x$ (secondo che il punto *P* si trovi al di sotto o a di sopra del fuoco *F*). Ora il triangolo rettangolo *MPF* fornisce sia nell’uno che nell’altro caso $MF^2 = MP^2+PF^2$ cioè:
$m^2 + 2mx + x^2 = y^2 +m^2 -2mx +x^2$, ossia, semplificando: $y^2 = 4mx = px,$ **c.v.d**.

Corollari (Cfr. Fig. II)

1. .(**Corollario fondamentale**). E’ dunque evidente che chiamando p il parametro relativo all’asse *AP*; x ognuna delle parti *AP* dell’asse; y ognuna delle ordinate corrispondenti *PM*; si avrà sempre: $y^2 = px.$



Ora, siccome questa proprietà caratterizza tutti i punti della parabola e ne determina la posizione relativamente all'asse *AP*, segue che l'equazione $y^2 = px$ esprime perfettamente la natura della parabola rispetto al proprio asse.

2. Tracciate due ordinate qualsiasi *MP* , *NQ* relative all'asse *AP*, i loro quadrati hanno rapporto uguale a quello delle parti *AP* e *AQ* dell'asse comprese tra l'origine *A* e i piedi *P* e *Q* di tali ordinate. Infatti:
   $PM^2 : QN^2 = (p \times AP) : (p \times AQ) = AP : AQ$
3. Se da un punto qualunque *P* dell'asse *AP* si traccia una parallela *MPM* alle ordinate ad esso relative, tale parallela incontrerà la parabola in due punti *M* ed *M* collocati da parti opposte rispetto a *P*, e da *P* equidistanti. Infatti, poiché i punti *M* ed *M* appartengono alla parabola, i quadrati di ognuno dei due *PM* (*y*) (da una parte e dall'altra di *P*) siano entrambi uguali al medesimo rettangolo *px*.
4. Dal fatto che $y^2=px$ segue che quanto più *AP (x)* è grande, tanto più aumenta l'ordinata *PM (y)* sia da una parte che dall'altra dell'asse *AP*, e questo fino all'infinito; invece quanto più *AP (x)* diminuisce, tanto più l'ordinata *PM (y)* diventa piccola: in modo che quando *AP (x)* si annulla (è uguale a zero) anche ogni *PM (y)* diventa uguale a zero (sia da una parte che dall'altra dell'asse *AP*). Quindi se il punto *P* coincide con *A*, anche i due punti di incontro *M* ed *M* vanno a coincidere con *A*. Da ciò chiaramente risulta:
   a) Se si traccia una retta *LL* passante per *A* e parallela alle ordinate relative all'asse *AP*, tale retta risulta tangente in *A* alla parabola
   b) La parabola si allontana sempre più dal proprio asse *AP* mano a mano che si procede, partendo dall'origine *A* dell'asse, verso l'infinito; quindi ogni parallela *LM* all'asse *AP* incontra la parabola in un sol punto *M*, e da *M* in poi rimane all'interno della curva, poiché la sua distanza dall'asse è costante.
5. Se per un punto qualsiasi *M* della parabola si fa passare una parallela *ML* all'asse *AP* che incontri in *L* la parallela *AL* condotta per *A* alle ordinate relative all'asse, si può facilmente constatare, dopo aver tracciato l'ordinata *MP*, che $AL = PM\ (y)$, e che $ML = AP\ (x) = y^2 : p$ (sappiamo infatti che $y^2 = px$). Segue che le rette *ML* ed *ML* (prese da una parte e dall'altra dell'asse *AP*) risultano uguali

fra loro se i punti *L* ed *L* sono equidistanti da *A*. Dunque se una qualunque linea *MM* avente i suoi estremi sulla parabola è tagliata in due parti uguali dall'asse nel punto *P*, essa sarà allora parallela alla tangente *LL*: cioè sarà (da entrambe le parti di *P*) ordinata rispetto all'asse. Infatti, tracciate le parallele *ML* ed *ML* all'asse *AP*, è evidente che *A* è punto medio di *LL*, essendo *P* punto medio di *MM*. Le linee *ML*, *ML* saranno dunque fra loro uguali (lo abbiamo appena dimostrato) e conseguentemente la linea *MM* è parallela a *LL.*

6. Da quanto detto segue che tutte le perpendicolari *MPM* all'asse *AP* (limitate ai loro estremi dalla parabola) sono divise in parti uguali dal punto *P*; e che l'asse divide la parabola in due archi del tutto uguali e ugualmente collocati rispetto all'asse medesimo. Sicchè se il piano su cui la curva è tracciata fosse piegato lungo l'asse fino alla sovrapposizione di una sua parte con l'altra, si vedrebbero i due archi della parabola coincidere esattamente.

PROPOSIZIONE II (Cfr. Fig. III)

Teorema: Se dall'origine *A* dell'asse *AP* si traccia una linea retta qualsiasi *AM* entro l'uno o l'altro dei due angoli *PAL*, *PAL* che l'asse *AP* forma con la retta *LL* parallela alle ordinate a tale asse relative: io dico che la retta *AM* incontrerà la parabola *MAM* in un altro punto *M* (oltre che in *A*).

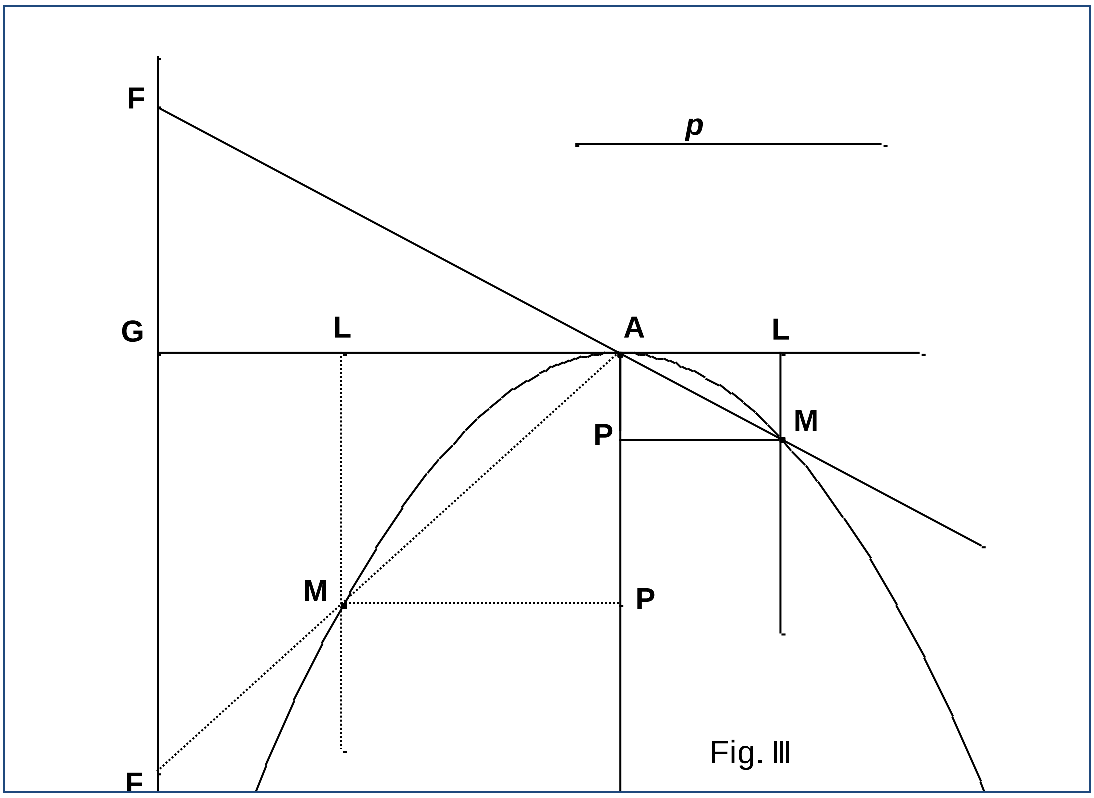


Fig. III

Dimostrazione. Si prenda su *AL*, da una parte o dall'altra del punto *A*, la parte *AG* uguale al parametro p relativo all'asse; si tracci parallelamente all'asse *AP*, la linea

GF che incontri *AM* (prolungata se necessario) in *F*; si prenda poi su *AL*, dalla medesima parte in cui si trova *AM* rispetto all'asse *AP*, la parte AL=GF; infine, condotta *LM* parallela all'asse, io dico che il punto *M* in cui questa linea *LM* incontra *AM*, apparterrà alla parabola *MAM*.
Sia infatti *MP* parallela ad *AL*: i triangoli simili *FGA, APM* permettono di scrivere la proporzione: *FG = AL = PM : GA = AP : PM*. Da questa si ricava:
$PM^2 = GA \times AP = p \times AP.$
La linea *PM* sarà dunque una ordinata relativa all'asse *AP*, **c. v. d.**

Corollari.

1. Dato l'asse *AP* di una parabola *MAM* e il parametro *p* ad esso relativo; tracciata, entro l'uno o l'altro degli angoli *PAL, PAL* formati dall'asse *AP* con la linea *LL* parallela alle ordinate relative a tale asse, una retta generica *AM* passante per *A*: da quanto si è detto vediamo subito ciò che si deve fare per determinare su *AM* il punto *M* di incontro con la parabola *MAM*.
2. E' evidente che c'è soltanto la retta *LAL* parallela alle ordinate relative all'asse *AP* che possa essere tangente alla parabola *MAM* nel punto *A* origine dell'asse: infatti tra le rette passanti per *A* soltanto questa, prolungata da entrambe le parti, non incontra la parabola in alcun altro punto, e non entra nello spazio interno alla curva.

Nel seguito della sua esposizione, De L'Hospital abbandona il sistema di coordinate ortogonali fin qui utilizzato. Sostituisce all'asse un diametro qualsiasi della parabola; ridefinisce il parametro e l'ordinata di un punto con riferimento a tale diametro (le ordinate risultano ora parallele alla retta tangente alla curva nell'estremo del diametro considerato); riscrive le equazioni nel nuovo riferimento (cioè in coniugazione obliqua) constatando che restano inalterate.
In seguito, dopo aver ricavato altre proprietà della curva, risolve alcuni problemi (costruzioni di parabole soddisfacenti a condizioni assegnate).

LIBRO II (Sulla ellisse)

Definizioni (Cfr. Fig. IV)

1. Si fissino sul piano i due estremi di un filo *FMf* attaccandoli a due punti *F* ed *f*, la cui distanza sia minore della lunghezza del filo; servendosi di uno stilo *M* che tenga il filo costantemente teso, si muova lo stilo attorno ai due punti fino a ricondurlo al punto di

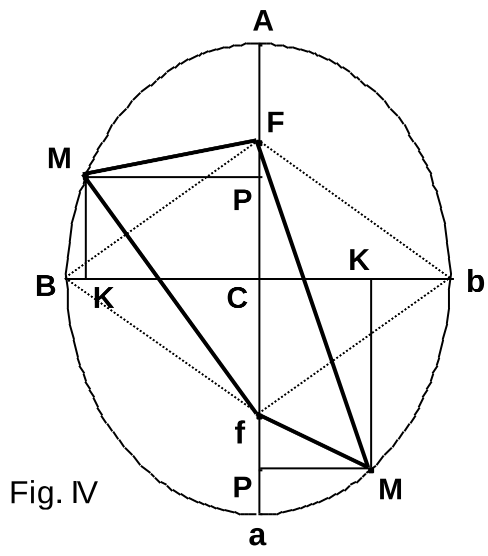


Fig. IV

partenza; lo stilo descriverà allora, nel suo movimento, una linea curva che chiameremo **ellisse** [(animazione)]

2. I due punti fissi *F, f* si chiamano **fuochi** della ellisse.
3. La linea *Aa*, che passa per i due fuochi *F, f* e che è limitata ai suoi estremi dall'ellisse si chiama **asse principale** o **asse maggiore**.
4. Il punto medio *C* dell'asse principale *Aa* si chiama **centro** dell'ellisse.
5. La linea *Bb*, condotta dal centro *C* perpendicolarmente all'asse principale Aa e limitata ai suoi estremi dall'ellisse, si chiama **asse secondario** o **asse minore**.
6. I due assi *Aa, Bb*, presi insieme, si chiamano **coniugati**: sicchè l'asse principale *Aa* è coniugato all'asse secondario *Bb*, e reciprocamente l'asse minore *Bb* è coniugato a quello maggiore *Aa*.
7. Le linee *MP, MK* condotte da un punto generico *M* dell'ellisse parellelamente ad uno degli assi e limitate dall'altro, si chiamano **ordinate relative a questo altro asse**: sicché *MP* è ordinata relativa all'asse *Aa*, e *MK* è ordinata relativa all'asse *Bb*.
8. La linea terza proporzionale rispetto ai due assi si chiama **parametro** relativo l'asse che è il primo termine della proporzione. Quindi, data la proporzione *Aa : Bb = Bb : p* (a parole: l'asse maggiore sta a quello minore come il minore sta a *p*) diremo che *p* è il **parametro relativo all'asse maggiore**.
9. Tutte le linee rette passanti per il centro *C* e limitate (da una parte e dall'altra) dall'ellisse, si chiamano **diametri**.
10. Una linea retta che incontra l'ellisse solo in un punto e che, prolungata da entrambe le parti non entra mai nello spazio interno alla curva, ma ne resta sempre fuori, si chiama **tangente** all'ellisse in quel punto.

Osservazione.(Cfr. fig. V)

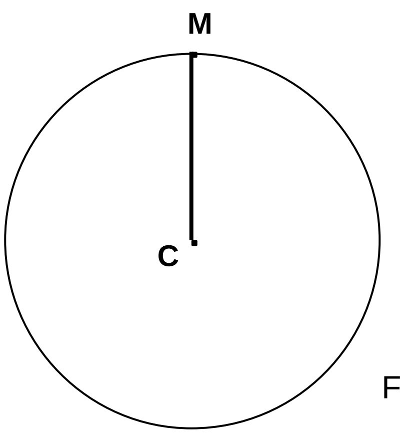


Fig. V

Se immaginiamo che i due fuochi *F, f* e il centro *C* coincidano in un unico punto, è chiaro che l'ellisse diventa una circonferenza avente per raggio la linea *CM*, uguale alla metà del filo *CMC* avente i suoi estremi legati al punto *C* che sarà il centro della circonferenza. Si potrà allora considerare la circonferenza come una particolare specie di ellisse, nella quale risulta nulla la distanza tra i fuochi. Quindi, tutte le proprietà che si dimostreranno in seguito per l'ellisse e risultino vere qualunque sia la distanza tra i due fuochi, saranno vere, nell'ipotesi che si annulli la distanza tra i fuochi, anche per la cironferenza.

Corollari (cfr. Fig. IV)

1. Segue dalla **def. 1** che, tracciate da un punto qualsiasi *M* dell'ellisse le rette *MF, Mf* che lo congiungono ai fuochi, la somma di tali rette sarà costante.
2. Quando il punto *M* coincide con *A* è chiaro che *MF* diventa *AF* e che *Mf* diventa *Af*; allo stesso modo, quando *M* coincide con *a*, è chiaro che *MF* diventa *aF* e che *Mf* diventa *af*. Sicché $AF + Af = 2AF + Ff = = aF + af = 2af + fF$: quindi $AF = af$. Segue che:
   a) La somma delle rette *MF, Mf* è sempre uguale all'asse principale *Aa*. Infatti $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.
   b) La distanza *Ff* tra i fuochi è divisa in due parti uguali dal centro *C*, poiché $CA – AF = CF = Ca – af = Cf$.
3. Se dall'estremità *B* dell'asse secondario *Bb* si tracciano, fino ai fuochi *F* ed *f*, le rette *BF, Bf*: è chiaro che i triangoli rettangoli *BCF*, *BCf* sono uguali e che quindi l'ipotenusa *BF* è uguale all'altra ipotenusa *Bf.* Conseguentemente $BF = Bf = CA = Ca$ poiché (**cor. 2**) $BF + Bf = Aa$. Si dimostra allo stesso modo che $Fb = bf = CA = Ca$. Si può allora constatare che:
   a) L'asse secondario *Bb* è diviso in due parti uguali dal centro *C*; infatti i triangoli rettangoli *FCB, FCb* sono uguali avendo uguali le ipotenuse *FB, Fb* e il cateto *FC* in comune.
   b) L'asse secondario *Bb* è sempre minore dell'asse principale *Aa*; infatti la sua metà *BC*, essendo uno dei cateti del triangolo rettangolo *BCF*, sarà minore della sua ipotenusa *BF* che è uguale alla metà *CA* dell'asse principale *Aa*.
   c) Se si traccia una circonferenza avente come centro uno degli estremi dell'asse secondario (o minore) *Bb* e raggio $BF = CA$ (metà dell'asse principale *Aa*): tale circonferenza intersecherà l'asse maggiore in due punti *F, f* che saranno i due fuochi dell'ellisse.
4. Poniamo (conservando ogni altra ipotesi) $CA = BF = t, CF = m$. Dal triangolo rettangolo *BCF* si ricava $BC^2 = t^2 - m^2$ Ma poiché risulta $AF = t – m, Fa = t + m$, è anche: $AF \times Fa = t^2 - m^2$. Si conclude allora che il quadrato della metà *BC* dell'asse minore *Bb* è uguale al rettangolo formato dalle due parti dell'asse maggiore *Aa* comprese tra uno dei fuochi (*F*) e i suoi estremi *(A, a).*
5. Sarà ora facile disegnare una ellisse di cui siano dati i due assi *Aa*, *Bb*. Trovati infatti sull'asse maggiore *Aa* i due fuochi *F, f* (cfr. **cor. 3**, **c)**), si legheranno a questi punti i due capi di un filo *FMf* di lunghezza uguale ad *Aa.* Descritta, per mezzo di tale filo, una ellisse (come spiegato nella def. 1) è evidente che questa sarà proprio l'ellisse richiesta.

PROPOSIZIONE I

Teorema. (cfr. Fig. IV). In una ellisse, consideriamo una ordinata *MP* relativa all'asse maggiore *Aa* (*M* punto generico della ellisse); prendiamo sull'asse *Aa* la parte *AD = MF*. Vale la proporzione: *CA : CF = CP : CD*. Poniamo (come sopra) *CA = t, CF = m* (grandezze note); *CP = x, PM = y* (grandezze indeterminate); *CD = z* (incognita). Si possono presentare due casi.

Primo caso. Il punto *P* si trova al di sopra del centro *C.* Poiché *PF* è in tal caso sempre minore di *Pf*, segue che *MF = AD* sarà minore di *Mf = aD*. Quindi avremo:
AD = MF = t – z, aD = Mf = t +z, FP = m – x oppure *FP = x – m* (il punto *P* può essere al di sopra o al di sotto del fuoco *F*),
Pf = x + m. Dai triangoli rettangoli *MPF, MPf* si ricava allora:
$t^2 - 2tz + z^2 = y^2 + m^2 - 2mx + x^2$
e inoltre
$t^2 + 2tz + z^2 = y^2 + m^2 + 2mx + x^2$.
Sottraendo membro a membro dai termini della seconda uguaglianza quelli della prima si avrà $4tz = 4mx$, da cui $CD = z = mx/t$.

Secondo caso. Il punto *P* si trova al di sotto del centro *C.* Poiché *PF* è in tal caso sempre maggiore di *Pf*, segue che *MF = AD* sarà maggiore di
Mf = aD. Quindi avremo: *AD = MF = t + z*, *aD = Mf = t – z* , *PF = x + m*, *Pf = x – m* oppure *Pf = m – x* (il punto *P* può trovarsi al di sotto o al di sopra del fuoco *f*). Dai triangoli rettangoli MPF, MPf si ricava allora:
$t^2 + 2tz + z^2 = y^2 + m^2 + 2mx + x^2$, e inoltre
$t^2 - 2tz + z^2 = y^2 + m^2 - 2mx + x^2$.
Sottraendo membro a membro dai termini della prima uguaglianza quelli della seconda si avrà $4tz = 4mx$, da cui $CD = z = mx/t$.
Concludendo: sia nel primo che nel secondo caso si avrà $t : m = x : z$, cioè
CA : CF = CP : CD , **c. v. d**.

Corollario. E' dunque evidente che indicando con *t* *CA* oppure *Ca*, e con *m* *CF* oppure *Cf* (grandezze assegnate) e con *x* la indeterminata *CP* avremo sempre
$MF = t - mx/t$ e $Mf = t + mx/t$ se il punto *P* cade al di sopra del centro *C*. Si avrà al contrario $MF = t + mx/t$ e $Mf = t - mx/t$ se il punto *P* cade al di sotto del centro *C*.

PROPOSIZIONE II.

Teorema. Il quadrato di una generica ordinata *MP* relativa all'asse *Aa*, sta al rettangolo *AP × Pa* (rettangolo delle parti in cui *P* divide l'asse *Aa*) come il quadrato dell'asse coniugato *Bb* sta al quadrato dell'asse *è*.
Bisogna dunque dimostrare che $PM^2 : (AP \times Pa) = Bb^2 : Aa^2$
Manteniamo le medesime notazioni utilizzate nel precedente corollario. Sostituendo nell'uguaglianza $t^2 \pm 2tz + z^2 = y^2 + m^2 \pm 2mx + x^2$
(dimostrata con la **proposizione I** per mezzo del triangolo rettangolo MPF) al posto di *z* il suo valore mx/t , si otterrà:
$t^2y^2 = t^4 - t^2x^2 - m^2t^2 + m^2x^2$. Quest'ultima si può scrivere sotto forma di proporzione, ottenendo:
$(y^2):(t^2-x^2) = (t^2-m^2): (t^2)$, ossia (tenere presente il corollario 4)
$PM^2: (AP \times Pa) = BC^2 : CA^2 = Bb^2: Aa^2$. **C.v. d.**

Corollario I.
Se si considera una ordinata *MK* relativa all'altro asse *Bb* (porremo nel seguito $Bb = 2c$) è chiaro che allora sarà $MK = CP = x$, $CK = PM = y$. Quindi il teorema precedente ci permette di scrivere:
$PM^2: (AP \times Pa)= Bb^2: Aa^2$ ossia: $y^2: (t^2 - x^2) = 4c^2 : 4t^2$ Da quest'ultima si ricava
$4c^2x^2 = 4c^2t^2 - 4t^2y^2$ e infine $x^2 : (c^2-y^2) = 4t^2 : 4c^2$ cioè
$MK^2 : (BK \times Kb) = Aa^2 : Bb^2$
Concludendo: il quadrato di una qualsiasi ordinata relativa all'asse *Bb* sta al rettangolo *BK × Kb* (rettangolo delle parti in cui *K* divide l'asse *Bb*) come il quadrato dell'asse coniugato *Aa* sta al quadrato dell'asse *Bb*.

Corollario II (fondamentale).(Cfr. Fig. VI e VII).

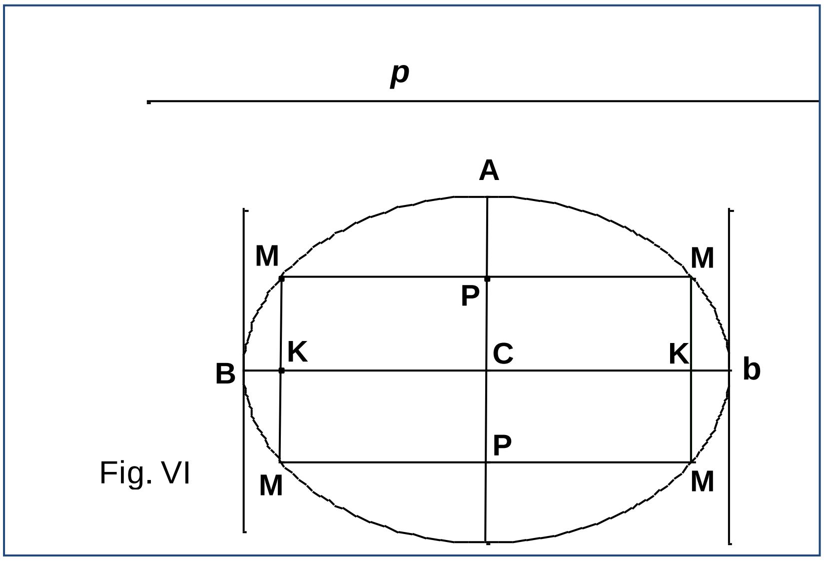


Fig. VI

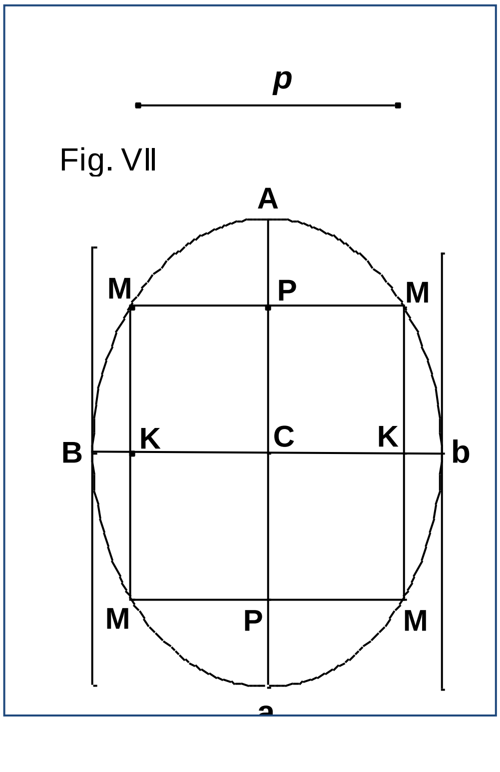


Fig. VII

Se uno degli assi (per esempio Aa) si indica con 2t e quello ad esso coniugato (per es. Bb) con 2c; se inoltre p è il parametro dell'asse prescelto, y = PM una qualunque delle ordinate ad esso relative, x ognuna delle parti CP comprese tra il centro e il punto di incontro P delle ordinate con l'asse, potremo sempre scrivere (in base alla **proposizione II**, e ricordando che per definizione risulta $Bb^2 = p/Aa$):
$PM^2 : (AP \times Pa) = Bb^2 : Aa^2 = p : Aa$.
Cioè:
$y^2 : (t^2 - x^2) = 4c^2 : 4t^2 = p : 2t$.
Uguagliando i prodotti degli estremi e dei medi in entrambe queste proporzioni si ricava:
$y^2 = c^2 - (c/t)^2 x^2$
oppure
$y^2 = (1/2)pt - (p/2t)x^2$.
Ora, siccome queste proprietà sono verificate per tutti i punti dell'ellisse, e ne determinano la posizione rispetto agli assi coniugati *Aa, Bb*: ne consegue che le equazioni
$y^2 + (c/t)^2 x^2 = c^2$
oppure
$y^2 + (p/2t)x^2 = (1/2)pt$
esprimono perfettamente la natura dell'ellisse (con riferimento ai suoi assi).

De L'Hospital prosegue ricavando, (con ulteriori definizioni, teoremi e corollari) alcune altre proprietà dell'ellisse. Egli abbandona poi il riferimento ortogonale formato dagli assi della curva sostituendolo con quello obliquo costituito da due diametri coniugati qualsiasi, e dimostra che nel nuovo riferimento l'equazione della curva non cambia, purchè al parametro relativo ad uno degli assi si sostituisca quello (definito in modo analogo) relativo al diametro prescelto. Risolve poi numerosi problemi (costruzione – per punti o per moto continuo – di una ellisse soddisfacente a condizioni assegnate, ecc.).

LIBRO III (Sulla iperbole)

Definizioni. (Cfr. Fig. VIII)

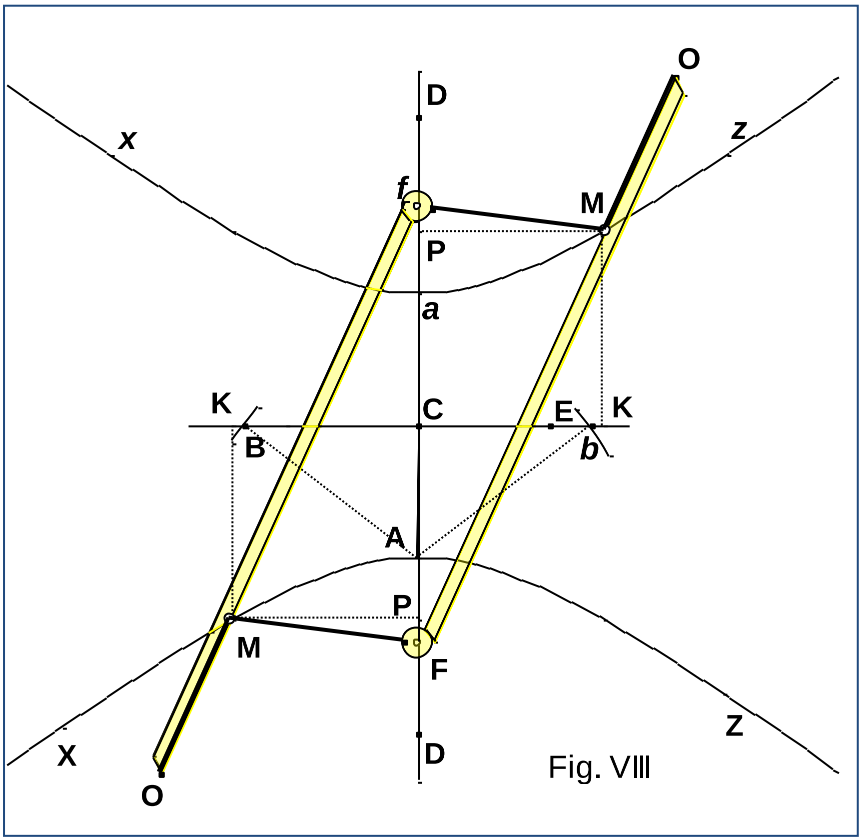


Fig. VIII

1. Si fissi su un piano, in un punto *f*, una delle estremità di una riga *fMO* in modo che essa possa ruotare liberamente attorno a tale punto *f* assunto come centro; si leghi all'altra estremità *O* il primo capo di un filo *OMF* (di lunghezza inferiore a quella della riga) l'altro capo del quale sia legato a un secondo punto *F* giacente sul medesimo piano. Se ora si fa ruotare la riga *fMO* attorno al punto fisso *f* e contemporaneamente, servendosi di uno stilo *M*, si tiene il filo *OMF* teso in modo tale che la sua parte *MO* si mantenga in contatto col bordo della riga (come se vi fosse incollata): durante tale movimento lo stilo *M* descriverà una curva *AX* che chiameremo **arco di iperbole** (animazione)

   Se la riga viene rovesciata collocandola dall'altra parte del punto *F*, si potrà descrivere allo stesso modo l'altro **arco** *AZ* della medesima **iperbole**. Se invece, senza cambiare la lunghezza della riga né quella del filo, si attacca l'estremità di tale riga in *F* e quella del filo in *f*, si descriverà (sempre con la medesima procedura) un'altra linea curva *xaz* opposta alla precedente *XAZ*. Chiameremo **iperbole** anche quest'altra curva, e indicheremo come **iperboli opposte** le due curve così tracciate, prese insieme.
2. I due punti fissi *F* ed *f* si chiamano **fuochi.**
3. La parte della linea *Aa* che passa per i due fuochi *F* ed *f* e che è limitata da una parte e dall'altra dalle iperboli opposte, si chiama **asse principale**.
4. Il punto medio *C* dell'asse principale *Aa* si chiama **centro**.
5. Si conduca per il centro *C* la perpendicolare all'asse principale *Aa*; si tracci poi, con centro in *A* e raggio *CF*, una circonferenza che intersechi tale perpendicolare nei punti *B* e *b*. La parte *Bb* della perpendicolare si chiama **asse secondario**.

6. Chiameremo **coniugati** gli assi *Aa*, *Bb*; e così l'asse principale *Aa* sarà **coniugato** di quello secondario *Bb*, e viceversa il secondario *Bb* sarà **coniugato** al principale *Aa*.
7. Le linee *MP*, *MK* condotte dai punti *M* delle iperboli opposte parallelamente ad uno degli assi coniugati (e aventi come secondo estremo l'intersezione con l'altro asse) si chiamano **ordinate** relative a quest'ultimo asse. Così *MP* è **ordinata relativa all'asse principale** Aa, MK è **ordinata relativa all'asse secondario** Bb.
8. Il terzo proporzionale fra i due assi è chiamato **parametro** relativo all'asse che figura come primo temine della proporzione. Ad esempio se vale la proporzione *Aa : Bb = Bb : p*, allora *p* è il **parametro relativo all'asse Aa**.
9. Tutte le linee passanti per il centro C si chiamano **diametri:** quelle che incontrano le iperboli opposte sono i **diametri principali**, quelli che non le incontrano (anche se prolungati all'infinito) sono i **diametri secondari**.
10. Una linea retta che incontri una iperbole in un punto soltanto, e che, prolungata indefinitamente da una parte e dall'altra di tale punto non attraversa mai la curva (rimanendo sempre nella parte esterna ad essa) si chiama **tangente** in quel punto.

Osservazione. (Cfr. Fig. IX).

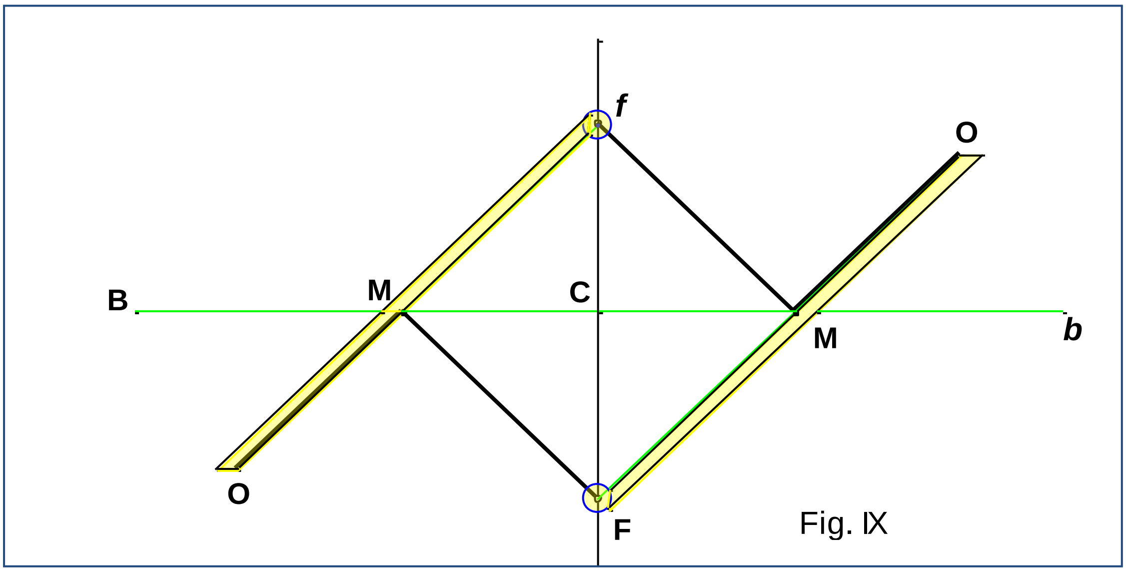


Fig. IX

Si è detto nella **definizione 1** che la lunghezza del filo *FMO* deve essere minore di quella della riga *fMO*. Potrebbe essere maggiore, ma non uguale: In quest'ultimo caso infatti lo stilo *M* descriverebbe nel suo movimento una linea tutti i punti *M* della quale dovrebbero essere equidistanti dai punti *F* ed *f*. Infatti, togliendo dal filo e dalla riga la parte comune *MO*, le parti rimanenti *MF* ed *Mf* sarebbero sempre uguali fra loro. E' chiaro dunque che la linea tracciata sarebbe in tal caso una retta *Bb* condotta perpendicolarmente a *Ff* e passante per il suo punto medio *C*.

Corollari.

1. Segue dalla **definizione 1** che, congiungendo un punto generico *M* di una delle iperboli opposte con i fuochi *F* ed *f*, si ottengono rette *MF* ed *Mf* la cui differenza è costante (cfr. fig. VIII). Infatti tale differenza sarà sempre uguale a quella tra la lunghezza della riga e la lunghezza del filo.
2. Quando il punto *M* coincide con *A*, si ha $MF = AF$, e $Mf = Af$. In modo analogo, quando il punto *M* (descrivendo l'iperbole opposta *xaz*) coincide con *a*, si ha $MF = aF$, e $Mf = af$. Dunque, poiché la differenza fra tali linee è ovunque sempre la stessa, si avrà:
   $Af – AF = Ff – 2AF = aF – af = Ff – 2af$, e perciò $AF = af$. Da ciò segue che:
   a) Il centro *C* divide in due parti uguali la distanza *Ff* tra i fuochi: infatti $CA + AF = CF = Ca + af = Cf$.
   b) La differenza tra *MF* ed *Mf* è sempre uguale all'asse principale *Aa*: infatti nell'iperbole *XAZ* si ha $Mf – MF = Af – AF = Af – af$, mentre nell'iperbole opposta *xaz*, $MF – Mf = aF – af = aF – AF$.
3. Conseguenze della **definizione 5**:
   a) L'asse secondario *Bb* è diviso in due parti uguali dal centro *C*; ciò discende dal fatto che i triangoli rettangoli *ACB, ACb* sono uguali, avendo uguali le ipotenuse (*AB, Ab*) e il lato *AC* in comune.
   b) Prendiamo sull'asse secondario *Bb* la parte *CE* uguale alla metà *CA* dell'asse principale, e tracciamo l'ipotenusa *AE*. L'asse secondario *Bb* sarà maggiore, uguale o minore dell'asse principale *Aa* se la retta *CE* è – rispettivamente – maggiore, uguale o minore dell'ipotenusa *AE*: giacché anche l'ipotenusa *Ab*, che è uguale a *CF*, sarà allora maggiore, uguale o minore dell'ipotenusa *AE*.
   c) Prendiamo sull'asse principale *Aa*, da una parte e dall'altra del centro *C*, le parti *CF, Cf*, ciascuna uguale all'ipotenusa *AB* del tringolo rettangolo *CAB* formato dai semiassi *CA, CB*: i punti *F, f* saranno allora i due fuochi.
4. Mantenendo le notazioni usate e le ipotesi fatte, poniamo
   $CF = AB = m, CA = Ca = t$. Dal triangolo rettangolo *ACB* si ricava $BC^2 = m^2 – t^2$.
   Ma è: $AF = m – t, Fa = m + t$; dunque:
   $AF \times Fa = m^2 – t^2$. Risulta allora evidente che il quadrato della metà *CB* dell'asse secondario *Bb* è uguale al rettangolo delle parti *AF* ed *Fa* dell'asse principale *Aa* comprese tra uno dei fuochi (*F*) e gli estremi *A, a*.
5. E' ora facile disegnare due iperboli opposte di cui siano noti gli assi *Aa, Bb,* e si sappia che *Aa* deve essere l'asse principale. Si determinano anzitutto sull'asse principale *Aa* i due fuochi *F, f* (cfr. **corollario 3**). Poi si fissa in *F* uno dei capi di un filo *FMO* che ha l'altro capo legato all'estremità *O* di una lunga riga *OMf*, avente a sua volta il secondo estremo *f* imperniato nel fuoco *f*; tale riga dovrà avere lunghezza minore o maggiore di quella del filo, in modo che la differenza fra le lunghezze sia uguale all'asse *Aa*. (cfr. **Osservazione** e Fig.

IX). Si descrivano ora, mediante la riga e il filo, due iperboli opposte *XAZ, xaz*, come spiegato nella **definizione 1**: è evidente che esse avranno come asse principale *Aa* e come asse secondario *Bb*; proprio quelle che si chiedeva. Quanto più la riga *OMf* sarà lunga, tanto più saranno grandi gli archi delle iperboli opposte descritte: sarà dunque possibile avere archi di ampiezza qualsiasi aumentando in modo uguale sia la lunghezza della riga che quella del filo.

PROPOSIZIONE 1 (Fig. VIII)

Teorema. Si tracci *MP*, ordinata relativa all'asse principale *Aa*; si prenda su questo asse (prolungato) la parte $AD = MF$, dal lato del fuoco *F* se il punto *M* appartiene all'iperbole *XAZ*, dal lato del fuoco *f* se invece *M* appartiene all'iperbole opposta. Io dico che $CA : CF = CP : CD$.

Dimostrazione. Si ponga (come in precedenza) $CA = Ca = t$;
$CF = Cf = m$; inoltre $CP = x$, $PM = y$ (indeterminate); $CD = z$ (incognita).
Si avrà:
<u>nel primo caso</u> $AD = MF = z – t$; $aD = Mf = z + t$; $FP = x – m$ oppure $m – x$ (secondo che il punto *P* cade al di sopra o al di sotto del fuoco *F*); $Pf = x + m$;
<u>nel secondo caso</u> $AD = MF = z + t$; $aD = Mf = z – t$; $FP = x + m$;
$Pf = x – m$ oppure $m – x$ (secondo che il punto *P* cada al di sopra o al di sotto del fuoco *f*).
Ciò posto, dal triangolo rettangolo *MPF* si ricava:
$$z^2 \mp 2zt + t^2 = y^2 + x^2 \mp 2mx + m^2$$
(si userà il – nel primo caso, il + nel secondo); mentre l'altro triangolo rettangolo *MPf* porge:
$$z^2 \pm 2tz + t^2 = y^2 + x^2 \pm 2mx + m^2$$
(si userà il + nel primo caso, il – nel secondo).
Ora, sottraendo (nel primo caso) membro a membro la prima delle due precedenti equazioni dalla seconda, e al contrario (nel secondo caso) la seconda di tali equazioni dalla prima, ricaviamo $4tz = 4mx$, cioè $z= mx/t$.
Dunque $t : m = x : z$, ossia $CA : CF = CP : CD$. ***Come volevasi dimostrare.***

Corollario.
E' evidente che, posto $CA = Ca = t$; $CF = Cf = m$; $CP = x$; si avrà sempre $MF = mx/t -t$ e $Mf = mx/t +t$ quando il punto *M* appartiene all'iperbole *XAZ* che ha *F* come fuoco. Si avrà al contrario $MF = mx/t + t$ e $Mf = mx/t -t$ quando il punto *M* appartiene all'iperbole opposta *xaz* che ha *f* come fuoco.

PROPOSIZIONE 2. (Fig. VIII)

Teorema. Il quadrato di una qualunque ordinata PM relativa all’asse principale Aa sta al rettangolo formato dalle parti AP e Pa di tale asse (prolungato) come il quadrato dell’asse coniugato Bb sta al quadrato dell’asse principale Aa.
Si deve dunque dimostrare che: $PM^2 : (AP \times Pa) = Bb^2 : Aa^2$. .
Usando le solite notazioni, sostituiamo al posto di z, nella equazione
sto, dal triangolo rettangolo *MPF* si ricava:
$z^2 \mp 2zt + t^2 = y^2 + x^2 \mp 2mx + m^2$ (cfr. proposizione 1) il suo valore mx/t;
otterremo $y^2t^2 = m^2x^2 - m^2t^2 - t^2x^2 - t^4$. Scrivendo quest’ultima in forma di proporzione, si ricava
$y^2 : (x^2 - t^2) = (m^2 - t^2) : t^2$, cioè
$PM^2 : (AP \times Pa) = BC^2 : CA^2 = Bb^2 : Aa^2$. ***Come volevasi dimostrare***.

Corollario 1
Si tracci una ordinata MK relativa all’asse secondario Bb; si ponga
Bb = 2c. E’ chiaro che (cfr. fig.VIII) MK = CP = x, e che CK = PM = y.
Ora, dalla proporzione $PM^2 : (AP \times Pa) = Bb^2 : Aa^2$ dimostrata nel teorema precedente, ricaviamo $y^2 : (x^2 - t^2) = 4c^2 : 4t^2$. Quest’ultima si può scrivere
$4c^2x^2 = 4c^2t^2 + 4t^2y^2$ cioè $x^2 : (y^2 + c^2) = Aa^2 : Bb^2$, oppure
$MK^2 : (CK^2 + CB^2) = Aa^2 : Bb^2$.
Dunque: il quadrato di una qualunque ordinata MK relativa all’asse secondario Bb sta alla somma del quadrato di CK e del quadrato della metà CB dell’asse Bb, come il quadrato dell’asse coniugato Aa sta al quadrato dell’asse Bb.

Corollario 2 (fondamentale). (Cfr. Fig. X e XI)

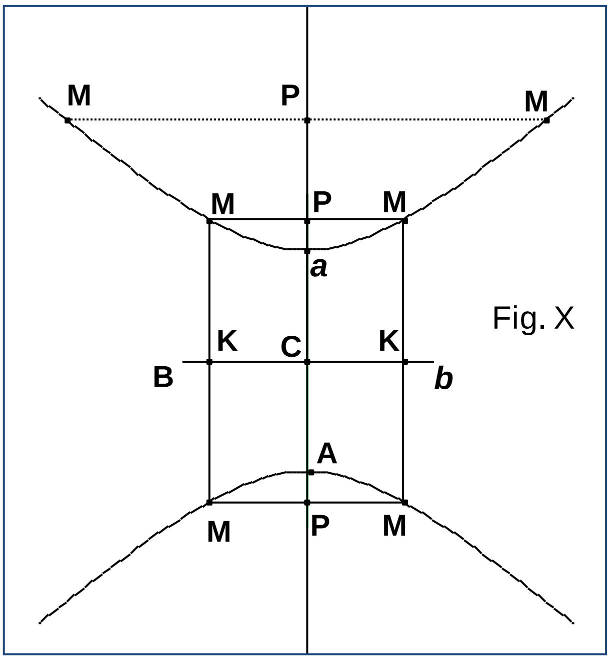


Fig. X

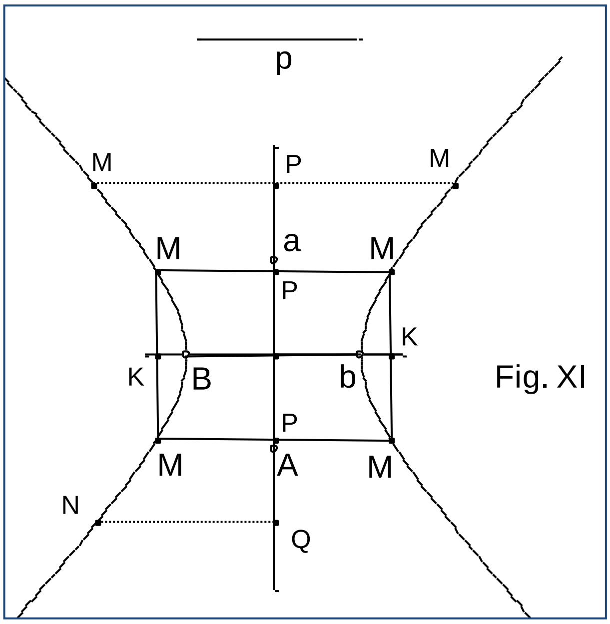


Fig. XI

Poniamo Aa (asse principale o secondario) = 2t; Bb (asse coniugato ad Aa) = 2c; sia inoltre p il parametro relativo all'asse Aa; indichiamo inoltre con y ogni ordinata PM relativa all'asse Aa, con x ognuna della parti CP di Aa comprese tra il centro C e il piede delle ordinate y. Si avrà sempre

$y^2 : (x^2 \mp t^2)=4c^2 : 4t^2 = p : 2t$, che si può anche scrivere:
$PM^2 : (CP^2 \mp CA^2)= Bb^2 : Aa^2 = p : Aa$.
Le precedenti proporzioni si ricavano:

- tenendo presente quanto appena dimostrato nel **teorema 2** e nel suo **corollario 1**;
- ricordando che per definizione di parametro $Aa : Bb = Bb : p$, quindi $2t : 2c = 2c : p$, da cui $p=4c^2/2t$;
- osservando che il segno – deve essere usato quando l'asse Aa è quello principale; in tal caso risulta $AP \times Pa = CP^2- CA^2$; invece il segno + deve essere usato quando l'asse Aa è quello secondario.

Dalla prima proporzione, $y^2 : (x^2 \mp t^2)=4c^2 : 4t^2$ si ha (uguagliando il prodotto degli estremi e dei medi):
$y^2 = c^2x^2/t^2 \mp c^2$

Dalla seconda proporzione, $y^2 : (x^2 \mp t^2)= p : 2t$, si ha invece:
$y^2 = px^2/2t \mp pt/2$
.
Siccome queste proprietà valgono per tutti i punti delle iperboli opposte, e ne caratterizzano la posizione rispetto agli assi, segue che ognuna delle precedenti equazioni esprime perfettamente la natura della curva riferita ai propri assi.

Nei successivi corollari 3, 4, 5, 6 e 7 De L'Hospital deduce, analizzando le equazioni ottenute, ulteriori proprietà delle iperboli opposte; poi osserva:
Si è seguito fin qui lo stesso metodo adottato per l'ellisse, e sarebbe stato possibile proseguire e concludere così. Ma poiché bisogna parlare necessariamente di certe linee particolari legate all'iperbole, e poiché con l'aiuto di tali linee si possono dimostrare in modo più agevole molte proprietà della curva, abbiamo scelto questa nuova strada.

Le linee particolari a cui egli accenna sono gli asintoti, che introduce con le seguenti **Definizioni.** (Cfr. fig. XII)

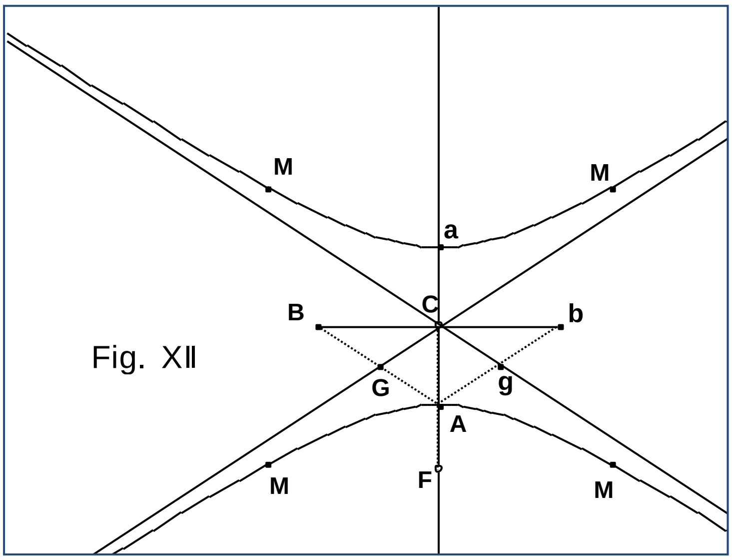


Fig. XII

11. Se dal centro C si tracciano due (semi)rette illimitate CG, Cg parallele alle linee Ab, AB che congiungono l'estremità A dell'asse principale Aa con le estremità B, b di quello secondario: queste (semi)rette illimitate si chiamano gli **Asintoti** della iperbole MAM. Prolungandole indefinitamente dall'altra parte del centro si otterranno gli **Asintoti** dell'iperbole opposta MaM.

12. Il quadrato della parte CG o Cg di un asintoto compresa fra il centro C e l'intersezione dell'asintoto stesso con la linea AB (o Ab) condotta dall'estremità A dell'asse principale fino all'estremità B (oppure b) del suo coniugato, si chiama **Potenza** dell'iperbole MAM, o della sua opposta MaM.

*In seguito, attraverso alcuni passaggi intermedi (**proposizioni 3, 4** e relativi **corollari**) De L'Hospital enuncia e dimostra il teorema seguente:*

PROPOSIZIONE 5. (Cfr. fig. XIII)

Tracciate da due punti qualunque M, N di una iperbole o di iperboli opposte una coppia di rette MH, NL fra loro parallele e limitate da un asintoto; tracciate inoltre dai medesimi punti una seconda coppia di rette Mh, Nl anch'esse parallele e limitate dall'altro asintoto: i rettangoli HM×Mh e NL×Nl risultano uguali fra loro.

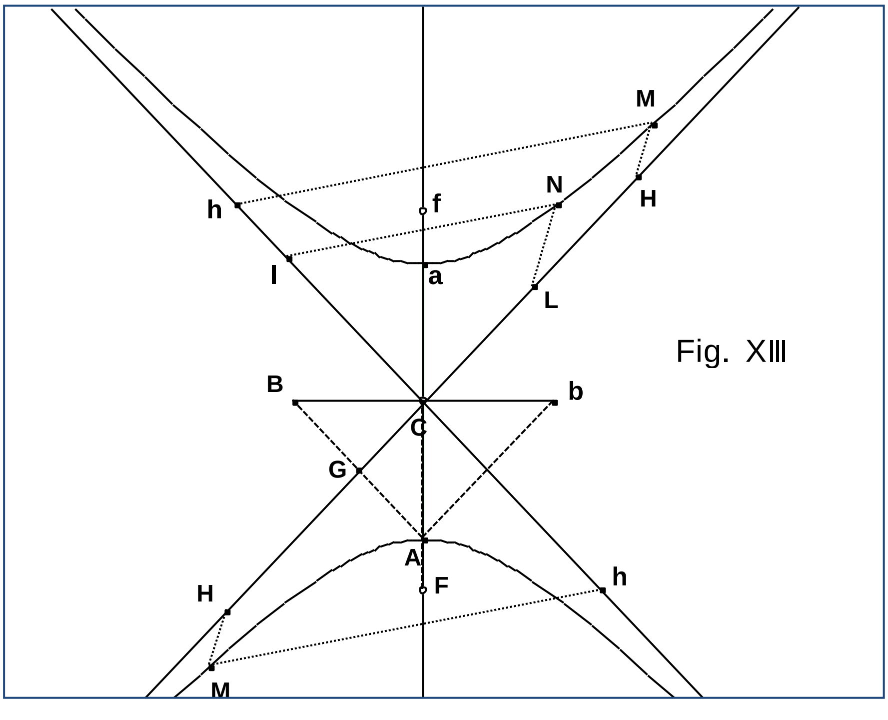


Fig. XIII

Interrompiamo qui la traduzione del Libro III, nel quale (mediante l'utilizzazione degli asintoti) vengono presentate numerose altre proprietà dell'iperbole. Ad esempio: le equazioni dedotte nel ***corollario fondamentale*** *della* ***proposizione 2*** *sono ricavate anche in coniugazione obliqua (con riferimento a due diametri coniugati qualsiasi e ai parametri ad essi relativi); si definisce e si studia* ***l'iperbole equilatera****; si risolvono alcuni problemi (costruzione di iperboli soddisfacenti a condizioni assegnate, ecc.).*