Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo N°9

J. KEPLER, "AD VITELLIONEM PARALIPOMENA" CAP. IV, PARAGRAFO 4 (*SULLE SEZIONI DEL CONO*). FRANCOFORTE, 1604.

Il brano qui di seguito proposto mostra un celebre esempio di uso della analogia in matematica. Contiene inoltre un elogio della analogia.
*"Fino alla fine del XVI secolo, la somiglianza (nelle sue varie figure: convenientia, aemulatio, analogia, simpatia) ha svolto una parte costruttiva nel sapere della cultura occidentale" (**cfr. M. Foucault, Le parole e le cose, Parte I, cap. II**). Non vi è somiglianza senza segnature: il sapere si fonda sul rilevamento di tali segnature (che sono state poste sulle cose da Dio, per segnalare con un contrassegno la somiglianza "al pari di un uomo che sotterrando un tesoro ne segna il posto per poterlo ritrovare") e sulla loro decifrazione. Il mondo è come un grande libro aperto, coperto di caratteri, figure, grafismi che si intrecciano e che occorre saper leggere, scoprendo la lingua in cui è scritto.*

Molti sono i coni: rettangoli, acutangoli, ottusangoli; e anche retti o regolari, scaleni o irregolari, accoppiati: su questo vedi le opere di Apollonio e di Eutocio.
L'insieme di tutte le sezioni coniche si può classificare dividendolo in cinque specie. Infatti la linea generata sulla superficie di un cono mediante sezione piana o è Retta, o Circonferenza, o Parabola, o Iperbole, o Ellisse.
Fra queste linee c'è un **ordine** fondato sulle loro proprietà; parlando più per **analogia** che con rigore geometrico, tale ordine è il seguente: partendo dalla Linea Retta si giunge con **continuità**, attraverso infinite Iperboli, alla Parabola; e poi, attraverso infinite Ellissi, alla Circonferenza. E infatti fra tutte le Iperboli la Linea Retta è quella più ottusa, e la Parabola quella più acuta; e fra tutte le Ellissi la Parabola è quella più acuta, la Circonferenza quella più ottusa. Dunque, collocate da un lato della Parabola ci sono due curve infinite per loro natura, l'Iperbole e la Retta; dall'altro lato due curve finite e chiuse su di sé, l'Ellisse e la Circonferenza.
Situata a metà, la Parabola ha una natura intermedia. Essa è infatti infinita, eppure manifesta anche finitezza; perché quanto più viene prolungata, tanto più diviene a se stessa parallela, e non allarga le sue braccia – diciamo così – come fa l'Iperbole, ma le riunisce per richiuderle all'infinito, in modo tale che sempre più comprendono ma sempre meno aggiungono; mentre l'Iperbole quanto più spazio comprende fra le

sue braccia, tanto più ne aggiunge. Agli estremi opposti ci sono dunque Circonferenza e Retta: l'una è pura curvità, l'altra pura rettilineità. Poste in mezzo, Iperbole, Parabola, Ellisse manifestano sia il retto che il curvo: in egual misura la Parabola, mentre l'Iperbole ha più rettilineità, la Ellisse più curvità. Per questo l'Iperbole, quanto più prolungata, tanto più assomiglia alla retta, o al proprio asintoto; l'Ellisse, quanto più si oltrepassa la sua metà, tanto maggiore circolarità rivela e finalmente torna indietro su se stessa; fra queste due la Parabola risulta in ogni caso più curva della Iperbole – purché, per il confronto, siano ugualmente prolungate – e sempre più "rettilinea" della Ellisse.

Dunque, poiché nell'ordine descritto Circonferenza e Retta occupano gli estremi, la Parabola sta esattamente a metà: e per questo, proprio come tutte le Rette e le Circonferenze sono **simili** fra loro, così sono **simili** anche tutte le parabole: differiscono solo per la grandezza.

In prossimità di queste linee ci sono dei punti meritevoli di speciale considerazione, i quali hanno una definizione precisa, ma non un nome preciso (a meno che non si sostituisca al nome qualche definizione o proprietà). Le rette che congiungono uno di tali punti con i punti di contatto delle tangenti alla sezione considerata, formano con queste tangenti angoli uguali a quelli che si ottengono congiungendo i medesimi punti di contatto con il punto opposto. Noi chiameremo "fuochi" questi punti, pensando alla luce e alla meccanica. Li chiameremmo più volentieri "centri" (si trovano sugli assi delle sezioni) se non fosse che gli studiosi delle coniche (nel caso della Ellisse e della Iperbole) indicano col nome di centro un altro punto.

Comunque, un solo punto (A) è fuoco per la Circonferenza, ed è lo stesso punto che viene chiamato centro; nella Ellisse i fuochi sono due (B e C)

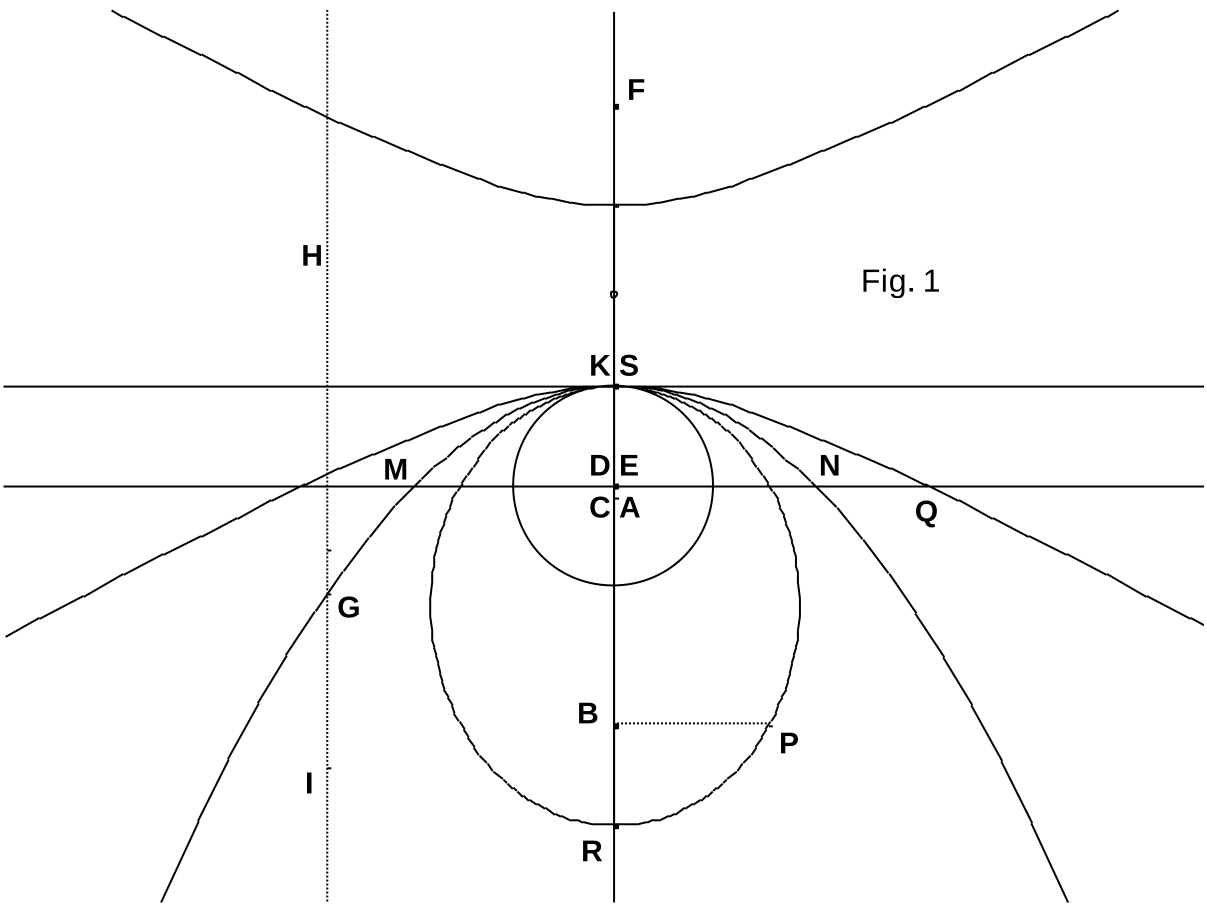

Fig. 1

(cfr. Fig. 1) ad eguale distanza dal centro, distanza tanto maggiore quanto più l'Ellisse è acuta. Nella Parabola, un solo fuoco (D) è interno alla sezione, l'altro si può considerare interno od esterno ed è infinitamente lontano dal primo, sull'asse della curva: sicché rette come HG o IG (cfr. sempre Fig. 1) condotte da quel fuoco invisibile a un punto qualsiasi G della sezione risultano parallele all'asse DK.
Nell'Iperbole il fuoco esterno F è tanto più vicino al fuoco interno E quanto più l'iperbole è ottusa. E il fuoco che è interno per una delle due sezioni opposte è esterno per l'altra, e viceversa.
Segue allora (per **analogia**) che entrambi i fuochi di una linea retta (parliamo così – al di là di ogni consuetudine – per rendere l'**analogia** più completa) giacciono proprio su questa medesima retta: vanno anzi a coincidere (ciò accade anche per la circonferenza) in un solo punto. Il quale, nella Circonferenza, è proprio il centro: perciò possiamo dire che il fuoco si discosta quanto più possibile dai punti di questa curva; nella Ellisse invece se ne discosta assai meno, ancor meno nella Parabola, e finalmente nella retta in modo minimo, in quanto vi giace sopra. Agli estremi dell'ordinamento considerato troviamo dunque Circonferenza e Retta, che hanno fuochi coincidenti: nel primo caso massimamente distanti dalla linea, nel secondo collocati proprio su di essa. In mezzo, troviamo la Parabola: i suoi fuochi sono fra loro a distanza infinitamente grande; ai lati della Parabola, Iperbole ed Elisse possiedono due fuochi la cui distanza è invece finita: nella Ellisse sono entrambi interni, nella Iperbole uno è esterno. Da ogni punti di vista sono situazioni opposte.
Chiameremo "corda" la linea MN (cfr. ancora Fig. 1) perpendicolare all'asse in un fuoco; la sua distanza dal vertice dell'arco di sezione conica più vicino (cioè la parte BR o DK o ES dell'asse) sarà indicata col termine "freccia". Nella Circonferenza la freccia è uguale alla semicorda, nella Ellisse la semicorda BF è maggiore della freccia BR e questa è maggiore della metà della semicorda, o quarta parte della corda. Nella Parabola, come Vitellione ha dimostrato, la freccia DK è esattamente uguale alla quarta parte della corda MN, cioè DN è il doppio di DK. Nell'Iperbole, EQ è maggiore del doppio di ES, cioè la freccia ES è minore di un quarto della corda, e potrà sempre diventar minore di qualsiasi parte di EQ mano a mano che l'Iperbole svanisce in Retta; in tal caso il fuoco appartiene alla Retta, la freccia (distanza tra il fuoco e la sezione) si riduce a zero e contemporaneamente la corda assume grandezza infinita, cioè coincide col proprio arco
Il termine "arco" è qui usato abusivamente, perché l' "arco" è ora una retta. ***Eppure, ritengo necessario che i termini geometrici siano assoggettati all'<u>analogia</u>: io amo moltissimo le <u>analogie</u>, che considero come miei affidabilissimi maestri, esperti di tutti gli arcani della natura; ad esse in geometria bisogna prestare attenzione soprattutto mentre racchiudono – anche se con espressioni che sembrano assurde – infiniti***
casi intermedi fra i loro estremi (e un centro), e così pongono davanti agli occhi, in piena luce, la vera essenza di qualche oggetto.

L'analogia mi ha aiutato moltissimo anche per disegnare le sezioni coniche. Infatti dalla lettura delle proposizioni 51 e 52 del Libro III di Apollonio si ricava facilmente come tracciare Ellissi e Iperboli: lo si può fare con un filo. Fissati infatti i fuochi A, B e internamente ad essi il vertice C (cfr. Fig. 2), si pianti un ago sia in A che in B. Si attacchi all'ago A un filo di lunghezza AC, all'ago B un filo di lunghezza BC. I due fili siano poi egualmente prolungati, e stringendo fra le dita questi due prolungamenti di eguale lunghezza, ci si muova da C verso il basso, facendo scorrere poco a poco piccole quantità uguali da entrambi i fili: con l'altra mano si segni la traiettoria del vertice di quell'angolo che i due fili formano uscendo dalle dita: questa traiettoria sarà l'iperbole.

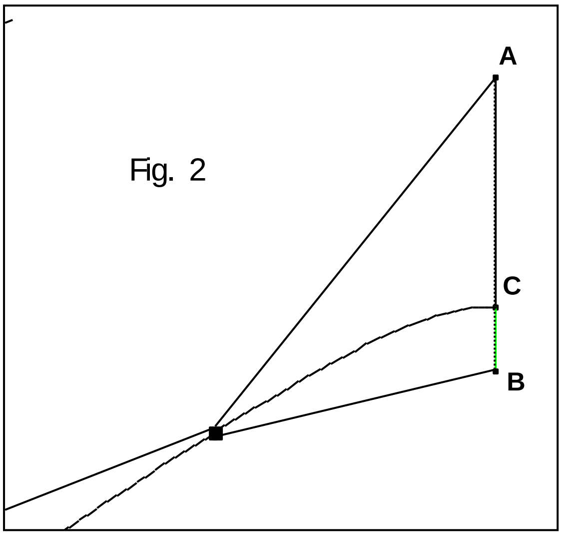

Fig. 2

Ancora più facile descrivere l'Ellisse. Siano A, B i suoi fuochi, C un suo vertice (cfr. Fig. 3). Si pianti un ago in A, un altro in B; entrambi gli aghi siano abbracciati con un filo, nel modo più semplice, sicché il filo non attraversi il tratto AB. La lunghezza del filo deve essere il doppio di AC, i suoi estremi vengano annodati. Inserita una penna D entro il filo che avvolge AB e tenendolo quanto più possibile teso, si tracci una curva attorno ad AB: questa curva è L'Ellisse.

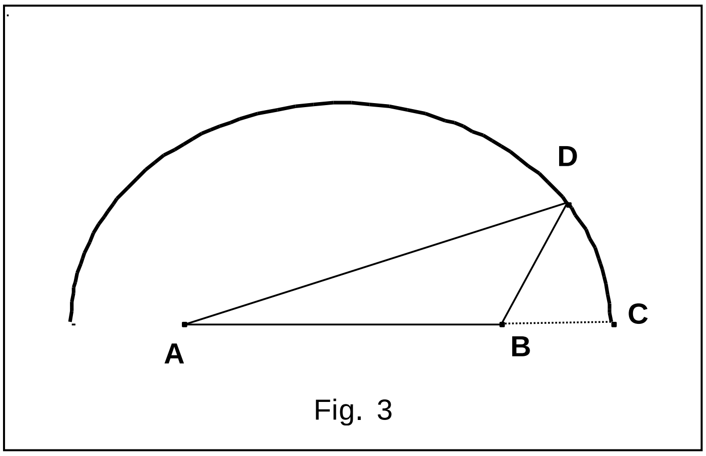

Fig. 3

Queste operazioni sono del tutto elementari, non richiedono quegli ingegnosi strumenti per la cui costruzione qualcuno si attira l'ammirazione degli uomini: perciò a lungo mi son dispiaciuto perché non riuscivo a descrivere allo stesso modo anche la Parabola. Alla fine l'**analogia** mi ha rivelato che tracciare questa curva non è molto più difficile (e la teoria geometrica lo conferma). Sia dato il fuoco A (cfr. Fig. 4), il vertice C, quindi l'asse AC: il quale sarà prolungato dalla parte di A,

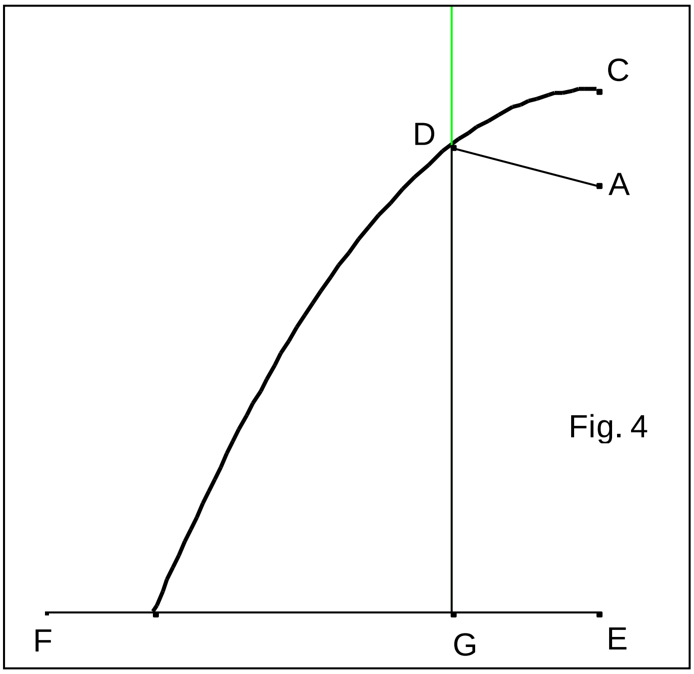

Fig. 4

indefinitamente o fino al punto che determina quale parte di parabola si vorrà tracciare. Si decida di prolungarlo, per esempio, fino in E. Si pianti ora un ago in A, e ad esso si leghi un filo di lunghezza AC + CE. Si tenga con una mano il secondo estremo E del filo, con l'altra mano una penna, mediante la quale il filo sia teso fino a C. Si consideri la perpendicolare EF a CE. La penna posta in C e la mano che regge l'estremo E del filo si allontanino ora dalla retta AE in modo che i tratti percorsi siano in ogni istante fra loro uguali: sicché la mano che regge l'estremo E del filo rimanga sempre (assieme ad E) su EF, e il filo DG resti sempre parallelo ad AE. La traiettoria CD che la penna descriverà sarà una parabola.

Ho detto queste cose sulle coniche con molto piacere perché non solo lo richiedeva la trattazione che farò subito della rifrazione, ma perché la utilità di queste curve apparirà anche in seguito, nella anatomia dell'occhio. Inoltre dovremo ricordarci delle coniche in due altre occasioni, parlando dei problemi di osservazione; le coniche devono poi essere necessariamente considerate nella costruzione di efficienti strumenti ottici, nell'esame delle immagini sospese nell'atmosfera, nei problemi di ingrandimento proporzionale di una figura, nella accensione di fuochi a grande distanza.