Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo N° 8

JAN DE WITT, "ELEMENTA CURVARUM LINEARUM", AMSTERDAM, 1659.

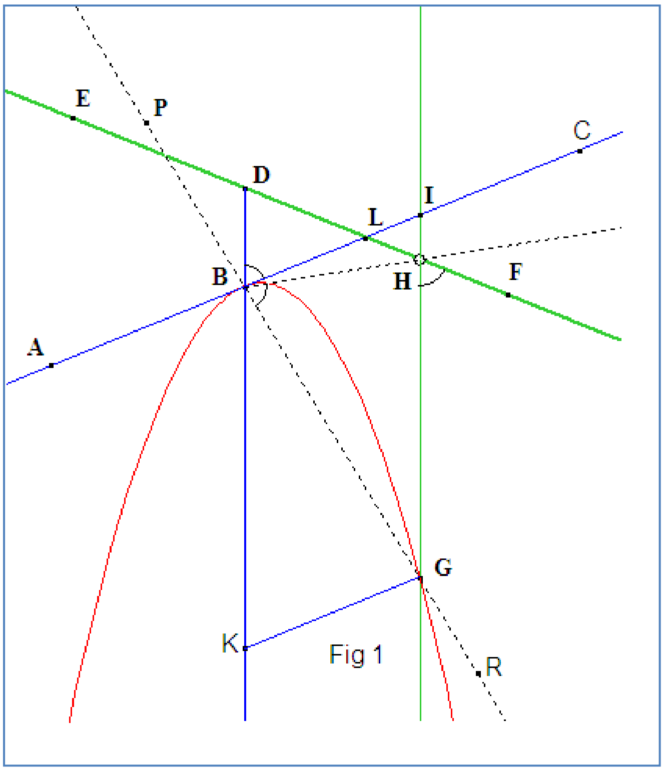
LIBRO PRIMO

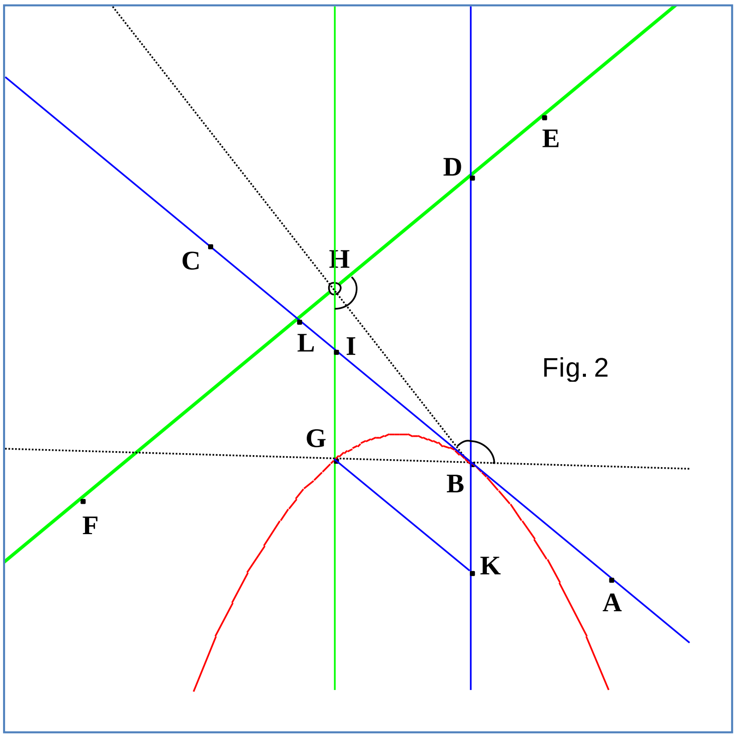
E' noto che la diffusione dei metodi matematici di Descartes in Olanda e nelle altre regioni d'Europa fu grandemente favorita dalla traduzione in lingua latina della ***Géometrie***, uscita ad Amsterdam (1659 – 1661) a cura di F. Van Schooten. Questo non solo perché il latino era allora la lingua universale del mondo scientifico, ma perché i due volumi della versione di Van Schooten (intitolata "***Geometria a Renato Des Cartes***") contenevano ampliamenti e aggiunte, fra cui gli "***Elementa curvarum linearum***" di J. De Witt.
De Witt aveva studiato diritto a Leida, e dedicò la maggior parte della sua vita all'attività politica (fu ucciso nel 1672, quando i francesi invasero l'Olanda), ma si interessò alla matematica quando conobbe Van Schooten (nella cui casa abitò per un lungo periodo di tempo). Gli "***Elementa curvarum***" contengono nel primo libro varie definizioni cinematiche (planimetriche) delle coniche (di cui vengono dedotte numerose proprietà): il metodo di trattazione è prevalentemente sintetico. Il secondo libro invece fa un uso sistematico delle coordinate e delle trasformazioni di coordinate (rotazione e traslazione degli assi) e si presenta come un manuale (uno dei primi manuali) di geometria analitica.
Le innovazioni cartesiane sono totalmente accolte: ma l'esposizione, rispetto a quella di Descartes, è molto più completa, particolareggiata, elementare.
Traduciamo qui di seguito alcune pagine tratte dal libro I degli "Elementa curvarum".
Al libro secondo sarà dedicato uno dei fascicoli successivi.
Si tenga presente, leggendo, che il linguaggio matematico non era ancora (a quei tempi) completamente unificato o standardizzato: ogni autore poteva proporre definizioni personali e parlare con termini diversi da quelli con cui gli altri indicavano i medesimi oggetti (e diversi, in parte, anche da quelli che oggi noi utilizziamo).
Poichè in questa opera (come in altre del medesimo periodo storico) protagonista del discorso teorico è il movimento, non deve poi sorprendere che ad esempio la proprietà caratteristica dell'ellisse (cfr. Cap. III del libro I) sia illustrata con numerose figure, che servono a presentare le varie configurazioni prodotte durante la

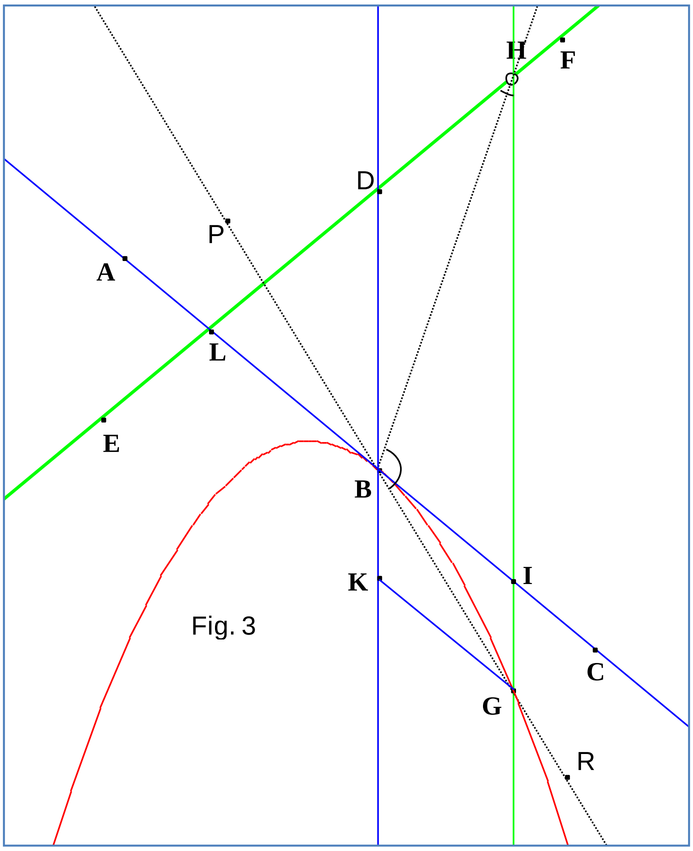
generazione cinematica della curva: si può così verificare che ad ognuna di tali configurazioni si applica il medesimo procedimento deduttivo.
Come sempre, scriveremo i testi tradotti con caratteri diversi da quelli utilizzati per le nostre osservazioni.

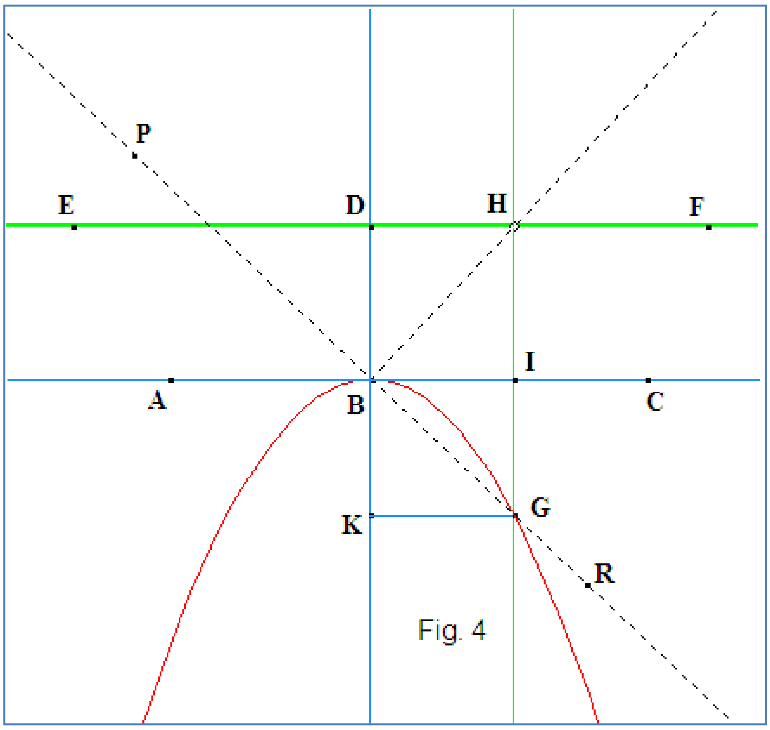
LIBRO PRIMO, Cap. I
Definizioni.

Una retta si muova nel piano rimanendo sempre parallela a se stessa, pilotata da un suo punto che scorre su un'altra retta immobile. Per questo punto passa anche uno dei lati di un angolo rettilineo (collocato nel piano delle due rette) avente il vertice in posizione prefissata. Così l'angolo è costretto a ruotare attorno al proprio vertice: l'intersezione fra l'altro suo lato e la retta mobile descrive una linea curva.
Chiameremo la retta che si muove restando sempre parallela a se stessa: **retta tracciante**.
L'altra retta, che rimane immobile, sarà chiamata invece: **retta direttrice**.
L'angolo ruotante (e quello ad esso adiacente) saranno in seguito indicati come **angoli mobili**.
Diremo **angoli alla direttrice** quelli formati dalla retta tracciante e dalla retta direttrice.
Polo sarà il punto fisso attorno al quale ruotano gli angoli mobili.
La parte della retta tracciante compresa tra retta direttrice e polo sarà chiamata **intervallo**.
Indicheremo come **lato passivo** dell'angolo mobile quello che la retta tracciante trascina con sé nel suo movimento.
L'altro lato dell'angolo mobile (quello che interseca la retta tracciante) sarà invece indicato come **lato attivo**.
Quando la retta tracciante passa per il polo coincide con il lato passivo, quindi è contemporaneamente retta tracciante e lato passivo: il lato attivo e l'intero angolo mobile si trovano allora in **posizione iniziale**. Ogni volta che diremo semplicemente lato attivo o angolo mobile o retta tracciante supporremo sempre che si trovino in tale posizione.
Diremo anche che ogni curva generata nel modo sopra spiegato è descritta con il lato attivo e l'intervallo quali si mostrano nella posizione iniziale, dove lato attivo e intervallo (quest'ultimo si sovrappone alla retta tracciante e al lato passivo) individuano gli angoli mobili.









Per maggiore chiarezza si vedano le figure 1, 2, 3, 4, e l'animazione 1 **dove la retta HG si muove restando sempre parallela a se stessa guidata da un suo punto H che scorre lungo la retta immobile EF; il punto H trascina con sé anche il lato BH**

dell'angolo HBG che così ruota attorno al punto B, mentre l'altro lato BG interseca la retta mobile HG generando una linea curva.
HG è la **retta tracciante**.
EF è la **retta direttrice**.
HBG, HBP sono gli **angoli mobili**.
FHG, EHG sono gli **angoli alla direttrice**.
B è il **polo**.
BD l'**intervallo**.
BH è il **lato passivo**.
BG il **lato attivo**.
PG la **retta attiva**.
DK è la **retta tracciante** in **posizione iniziale**, o semplicemente la **tracciante**.
DBC, DBA sono gli **angoli mobili** in **posizione iniziale**.
AC è la **retta attiva** in **posizione iniziale**, o semplicemente la **retta attiva**.
Diremo che la curva BG è tracciata con la **retta attiva** AC e l'**intervallo** BD; è chiaro che quando la **retta attiva** PG è nella posizione AC, il **lato passivo** BH coincide con l'**intervallo** BD e la **retta tracciante** HG è nella posizione DK, sicché la **tracciante** e l'**intervallo** formano entrambi gli **angoli mobili** DBC, DBA.

Teorema I

Qualunque siano linea attiva e intervallo, se gli angoli mobili sono uguali a quelli alla direttrice che si trovano dalla medesima parte, la curva descritta avrà la seguente proprietà:
Condotta da un punto qualsiasi della curva una parallela alla retta attiva fino ad incontrare la retta tracciante, si otterrà il lato di un quadrato equivalente al rettangolo avente come lati l'intervallo e la parte della retta tracciante compresa tra il polo e la parallela considerata.

Sia (cfr. Fig. 1, 2, 3, 4 e *animazione 2* *e* *animazione 3*) BG la curva tracciata con retta attiva ABC, intervallo BD, direttrice EF; sia inoltre l'angolo mobile DBA uguale all'angolo alla direttrice EDB.
Preso sulla curva un punto generico G, si tracci da G una parallela alla retta attiva AC fino ad incontrare in K la retta tracciante DBK; allora il quadrato di lato GK risulta equivalente al rettangolo di lati DB e BK.

Dimostrazione.
Collochiamo l'angolo mobile e la retta tracciante in posizione tale che si intersechino proprio nel punto G (nelle Figure, HBG è l'angolo mobile, HIG la retta tracciante).

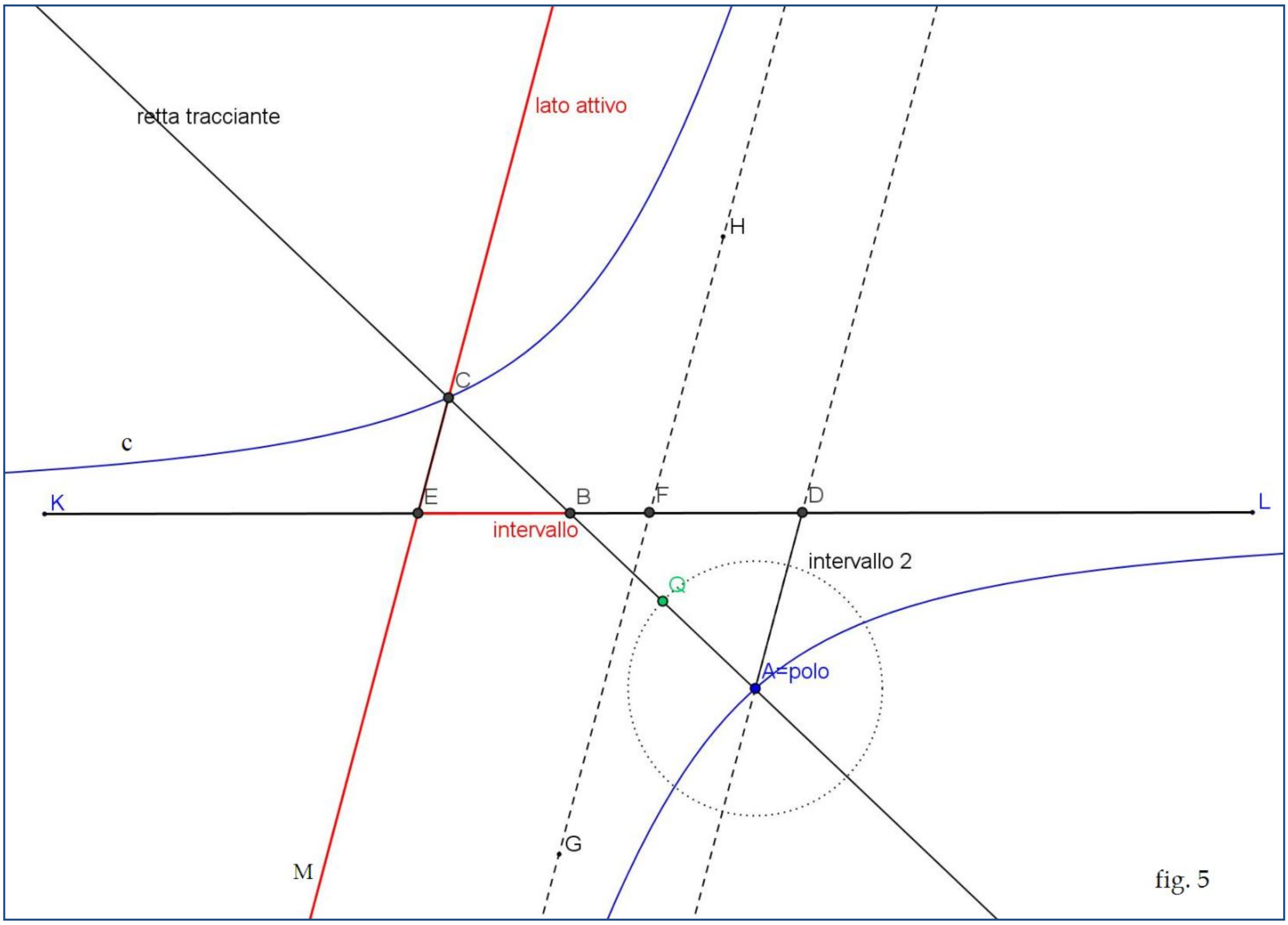
Supponiamo dapprima che l'angolo mobile e l'angolo alla direttrice siano entrambi retti (come in Fig. 4): si avrà in tal caso la proporzione HI : IB = IB : IG, cioè DB : GK = GK : BK. Quindi il quadrato di lato GK è equivalente al rettangolo di lati DB e BK.
Se invece gli angoli ABD ed EDB non sono retti (come accade nelle Fig. 1, 2, 3) la linea attiva e la direttrice (eventualmente prolungate) si incontrano nella parte di piano dove angolo mobile e angolo alla direttrice sono acuti: sia L la loro intersezione.
Gli angoli LBD, LDB sono uguali per ipotesi; per il parallelismo delle rette DB, HI sono anche uguali gli angoli LIH, LHI. Possiamo allora scrivere LD = LB, e inoltre LI = LH, sicché (per somma o differenza) DH = BI. Aggiungendo o togliendo agli angoli DBI, HBG il medesimo angolo HBI, si può verificare che l'angolo DBH è uguale all'angolo IBG, quindi anche all'angolo BGK. Inoltre l'angolo BDH è uguale per ipotesi all'angolo DBI, quindi anche all'angolo BKG.
Possiamo allora concludere che i triangoli BDH, GKB sono equiangoli, e scrivere la proporzione BD : DH = GK : KB, da cui si ricava immediatamente
BD : BI = GK : KB, e anche BD : GK = GK : KB. Il quadrato di lato GK risulta perciò equivalente al rettangolo di lati BD e KB, come volevasi dimostrare.
Constatiamo dunque che la curva tracciata per intersezione di due rette con la tecnica qui descritta è la medesima curva che gli antichi chiamavano ***parabola*** (*animazione2*); il **polo** B ne è il **vertice**; la **retta tracciante in posizione iniziale** coincide con un **diametro**, o (se gli **angoli mobili** sono **retti**) con l'**asse**; inoltre l'**intervallo** è quello che un tempo si chiamava **lato retto** (più recentemente **parametro**) **relativo all'asse** oppure **al diametro** individuato dalla tracciante; infine le parallele alla **retta attiva** sono quelle che gli antichi chiamavano (e così faremo anche noi) **rette applicate ordinatamente al diametro o all'asse**.

*Dopo aver ricavato dal precedente **Teorema I** (e da un **Teorema II** enunciato poco dopo) numerosi corollari, De Witt avverte che la curva del primo genere di cui parlerà nel successivo Capitolo II (si tratta dell'iperbole) potrebbe essere generata col medesimo metodo utilizzato per la parabola: scegliendo arbitrariamente linea attiva e intervallo, ma usando angoli mobili e angoli alla direttrice (quelli collocati dalla medesima parte) fra loro diversi.*
Tuttavia, esistono altre tecniche di generazione che consentono di dedurre in modo particolarmente semplice le proprietà della nuova curva. Nel Capitolo II se ne presenta una che non si discosta molto da quella studiata nel caso della parabola, perché la curva è ancora ottenuta intersecando una retta e un angolo rettilineo in movimento: solo che il moto dell'angolo non è circolare (attorno al vertice) ma rettilineo, e il moto della retta non è una traslazione, ma una rotazione (attorno a un punto).

Il Capitolo II inizia appunto adattando alla nuova situazione le definizioni del Capitolo I.

LIBRO PRIMO, Cap. II
Definizioni.

Una retta si muova nel piano di moto circolare attorno a un punto fisso, intersecando una retta immobile. Il punto di intersezione è fissato su uno dei lati di un angolo rettilineo (giacente sul medesimo piano). Questo lato appartiene alla retta immobile e quindi scorre su di essa, trascinato dalla retta che ruota. L'altro lato dell'angolo trasla invece nel piano e la sua intersezione con la retta in movimento descrive una curva.
La retta che ruota attorno al punto fisso si chiama **retta tracciante**.
Quella immobile, su cui scorre uno dei lati dell'angolo, si chiama **retta direttrice.**
L'angolo rettilineo trascinato dalla **retta tracciante** e quello ad esso adiacente, si chiamano **angoli mobili**.
Il punto fisso attorno al quale ruota la **retta tracciante**, sarà indicato come **polo**.
Il lato dell'**angolo mobile** che la **retta tracciante** fa scorrere lungo la **direttrice**, sarà chiamato **lato passivo**.
Chiameremo invece l'altro lato, quello che interseca la **retta tracciante**, **lato attivo**; prolungato oltre il vertice, **retta attiva**.
Quando la **retta tracciante** è parallela a quella **attiva** (quindi non esiste alcuna intersezione) diremo che sia la **retta attiva** che la **tracciante** si trovano **in posizione iniziale**: ogni volta che diremo semplicemente **retta attiva** o **retta tracciante** (senza altro aggiungere) supporremo che si trovino in tale posizione.
Indicheremo infine col termine **intervallo** sia la parte della **retta passiva** compresa tra il vertice dell'**angolo mobile** e la **tracciante**, sia la parte della **retta tracciante** compresa tra il **polo** e la **direttrice**.



Per maggiore chiarezza si veda la Fig. 5 e animazione 4 , dove la retta ABC è quella che si muove circolarmente attorno al punto fisso A, trascinando con sé l'angolo BEC il cui lato EB scorre sulla retta fissa KL, mentre la retta mobile ABC passa per un punto scelto sul lato EB (ad es. per B, come in Fig. 5). L'altro lato EC dell'angolo BEC interseca la retta ABC nel punto C, che descrive la curva cC.

Si tracci la retta AD parallela a EC. E' chiaro che quanto più la retta ABC si accosta alla retta AD, tanto più piccolo diventa l'angolo ECB, e quando infine ABC e AD coincidono, l'angolo ECB si riduce a zero: in tale posizione AD (quindi ABC) è parallela a EC, sicché EC (o la retta CEM) coincidono con GFH (retta disegnata in modo che DF=BE).

Allora:

ABC è la **retta tracciante** (in varie posizioni);

KL è la **direttrice**;

BEC, BEM (uguali a DFH, DFG) sono gli **angoli mobili**;

A è il **polo;**

EB è il **lato passivo**;

EC è il **lato attivo**;

MC è la **linea attiva**;

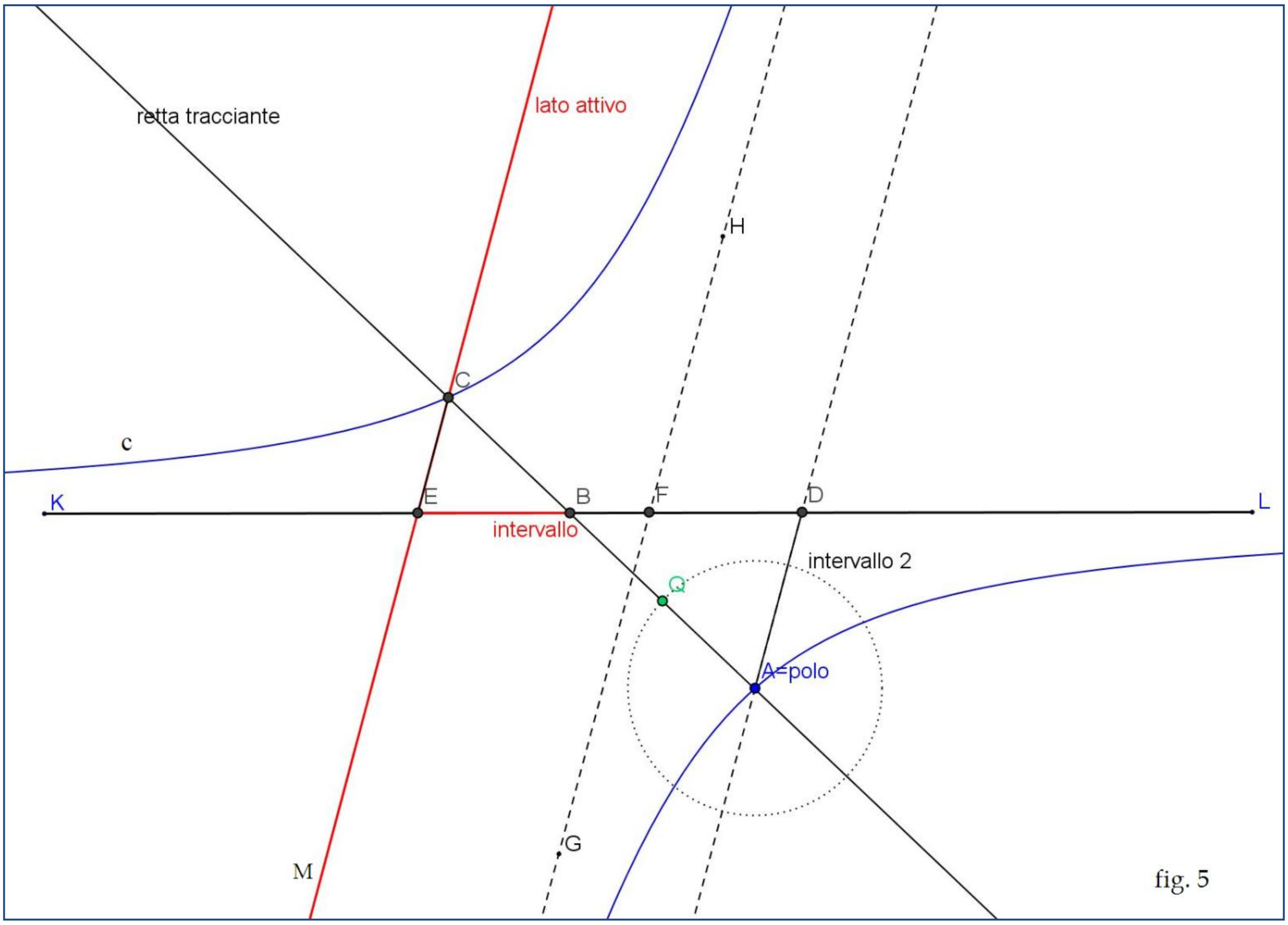
GFH è la **linea attiva in posizione iniziale** (o semplicemente la **linea attiva**);

ADI è la **retta tracciante in posizione iniziale** (o semplicemente la **retta tracciante**);

EB (uguale a FD) e AD (segmenti) sono infine i due **intervalli.**

Teorema III

Qualunque siano gli angoli mobili e gli intervalli, la curva descritta col metodo in precedenza indicato ha la seguente proprietà caratteristica.
Da un punto qualsiasi della curva si tracci una parallela alla linea attiva. Il rettangolo che ha come prima dimensione la parte di tale parallela limitata dal punto stesso e dalla direttrice, come seconda dimensione la parte della direttrice compresa tra la linea attiva e la medesima parallela, risulta equivalente al rettangolo avente come dimensioni i due intervalli.



La curva Cc (cfr. Fig. 5) sia descritta con direttrice KDL, angolo mobile BEC, intervalli EB (uguale a FD) e AD scelti a piacere. La linea attiva sia GFH. Da un punto C scelto sulla curva facciamo uscire una parallela alla linea attiva GFH (parallela quindi anche all'intervallo AD) fino ad incontrare in E la direttrice: io dico che il rettangolo che ha come lati FE ed EC è equivalente a quello che ha come lati AD ed EB (cioè gli intervalli) .

Dimostrazione.
Collochiamo sia l'angolo mobile che la retta tracciante in posizione tale che la loro intersezione sia C, per esempio in BEC, ABC. Sappiamo che i segmenti EB ed FD sono uguali; aggiungendo o togliendo ad essi una delle parti comuni (ED oppure FB), si deduce che sono anche uguali i segmenti BD ed FE; a causa del parallelismo delle rette EC, AD i triangoli BDA, BEC risultano allora equiangoli (simili), sicché vale la proporzione: BD (cioè FE) : DA = BE : EC, da cui (uguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi) FE $\times$ EC = AD $\times$ EB, come volevasi dimostrare.

Poiché tutti i rettangoli aventi come dimensione i segmenti FE ed EC sono equivalenti fra loro, è evidente che la curva tracciata come intersezione di due rette col metodo che abbiamo appena descritto è quella stessa che gli antichi chiamavano **Iperbole**: oppure, se consideriamo entrambe le curve che il medesimo movimento genera con continuità, sono proprio quelle che essi indicavano come **Sezioni Opposte** (di un cono).
La direttrice KL e la tracciante GH sono quelle che essi chiamavano **Asintoti**, e la loro intersezione è proprio il punto che essi indicavano come **Centro** dell'**Iperbole** o delle **Sezioni Opposte**. Noi manterremo questi termini, omettendo però quello di **Sezione**, che ci appare meno congruo al nostro discorso (cfr. ***Introduzione***).
Diremo inoltre che il rettangolo avente come lati gli intervalli (o il quadrato ad esso equivalente) è la **Potenza** dell'**Iperbole**.

Con una serie di altri teoremi (dal IV al XI) e i relativi corollari, De Witt ricava poi numerose altre proprietà dell'iperbole.
Resta da generare l'ellisse, a cui è dedicato il Cap. III.

LIBRO PRIMO, Cap. III
Definizioni.

Dato un triangolo rettangolo, se uno qualsiasi dei suoi lati (sia quello opposto all'angolo retto, sia uno di quelli opposti agli angoli acuti) si muove entro l'angolo nel quale si trova in modo che i suoi estremi scorrano sopra i lati dell'angolo e ognuno di tali estremi rimanga sempre sul lato cui apparteneva all'inizio (è chiaro che il lato mobile dovrà necessariamente essere prolungato dall'una o dall'altra parte); se inoltre il moto di tale lato continua allo stesso modo sia entro gli angoli adiacenti a quello in cui si trova, sia in quello opposto al vertice fino a tornare alla situazione iniziale; se infine si fissa sul lato mobile (oppure sul suo prolungamento) un punto scelto a piacere il quale descriverà una curva: allora indicheremo questo lato mobile col termine **linea tracciante**.
Chiameremo **punto attivo** (o semplicemente **punto**) quello prescelto per descrivere la curva.

Indicheremo come **intervallo** la distanza del **punto attivo** sia dall'uno che dall'altro estremo della **linea tracciante**.
Indicheremo semplicemente come **angolo** quello sotteso alla **linea tracciante** (nel quale essa si muove).
Il vertice dell'**angolo** (attorno al quale gira la **linea tracciante**) sarà chiamato **centro**.
Chiameremo invece **direttrice** un segmento preso su uno qualsiasi dei lati dell'**angolo** (prolungato se necessario) di lunghezza uguale all'**intervallo** che ha un estremo sul lato opposto.
Diremo che la **linea tracciante** si trova **in posizione iniziale** quando è perpendicolare alla **direttrice**; lo stesso si dirà del **punto**. Supporremo che linea tracciante e punto si trovino in questa posizione quando ne parleremo senza altro aggiungere.
Una parte della retta che passi per il punto e il centro, e abbia lunghezza doppia della distanza tra punto e centro, sarà chiamata **secante**.

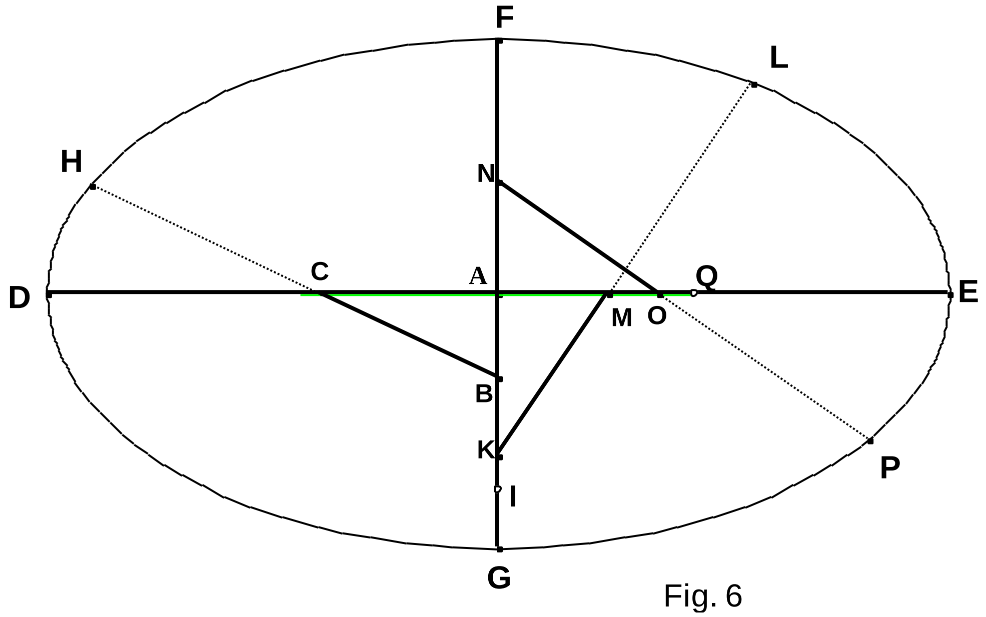


Fig. 6

Consideriamo allora la Fig. 6, dove immaginiamo che il lato BC del triangolo rettangolo ABC si muova entro l'angolo BAC in modo che, ad esempio, l'estremo C si avvicini ad A e contemporaneamente B retroceda o avanzi rispetto ad I: in modo che gli estremi B e C si mantengano sempre sui lati dell'angolo a cui appartenevano inizialmente (cioè B su AB, C su AC) eventualmente prolungati. A causa di questo moto un punto qualsiasi del lato BC (preso su BC stesso o su un suo prolungamento: quest'ultima, che giudichiamo più conveniente, sarà per lo più la nostra scelta) descriverà una linea curva. Quando il punto C si troverà in A, il punto B sarà allora in I e il punto H in F, e HF sarà la porzione di curva descritta. Il punto C procederà allora da A verso M: contemporaneamente B procederà o retrocederà verso K, sicché H sarà in L e risulterà descritto l'arco FL.
Allo stesso modo, se il punto B continua il suo moto da K fino ad A, il punto C attraverso M giungerà a Q, mentre H si troverà in E, e sarà così descritto l'arco LE.

E ancora: se il punto B attraversa A e procede fino ad N, contemporaneamente il punto C si avvicinerà o si allontanerà da Q portandosi in O, mentre il punto H giungerà in P e sarà così descritto l'arco EP.
Se poi il movimento continua con le medesime caratteristiche finchè il punto C passando per G e D arrivi in H, tutta la curva HFLEPGD sarà finalmente tracciata. (animazione 5)
Diremo che:
BC (che in altre posizioni coincide con IA, KM, AQ, NO ecc) è la **linea tracciante**;
H è il **punto attivo**;
il vertice dell'**angolo**, ossia il punto A, è il **centro**.
Inoltre, se uno dei lati dell'angolo (per esempio AC) viene delimitato (prolungandolo, se necessario, da entrambe le parti) con i punti D ed E in modo che sia AD = AE = HB (dove HB è l'intervallo che ha un estremo sull'altro lato), diremo che DE è una **direttrice**.
Nel caso in cui la **tracciante** BC sia perpendicolare alla **direttrice** DE (nel caso che l'**angolo** sia retto come in Fig. 6 la tracciante coinciderà allora col lato AB, mentre ciò non avverrà nel caso di angoli obliqui, come nelle Fig.7 e 8) diremo che la **tracciante** si trova in **posizione iniziale** (parlando semplicemente di **tracciante** la supporremo in tale posizione). All'estremità di BC, il punto F (Fig. 6) o il punto H (Fig. 7 e 8) saranno i **punti attivi in posizione iniziale** o semplicemente i **punti**.
Quando la **tracciante** è in **posizione iniziale**, i segmenti FAG (con riferimento alla Fig.6) o HAG (con riferimento alle Fig. 7 e 8), uscenti dai **punti**, passanti per il **centro** A e aventi lunghezza doppia di FA (Fig. 6) e HA (Fig. 7 e 8), rappresentano la **secante**.

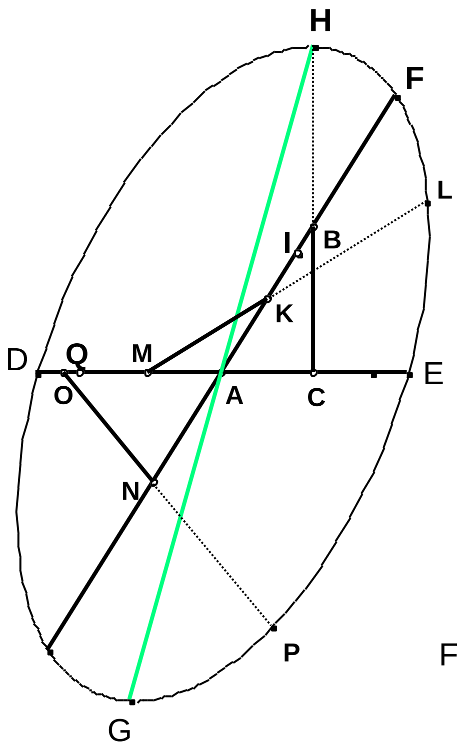


Fig.7

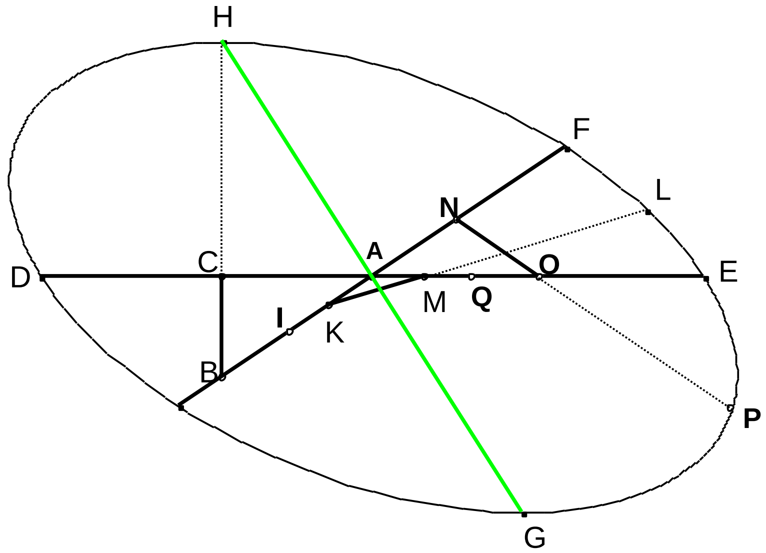


Fig. 8

Teorema XII

Dato un angolo e intervalli qualsiasi, la curva tracciata col metodo in precedenza descritto ha la seguente proprietà caratteristica:
il quadrato del segmento applicato alla direttrice parallelamente alla secante (cioè compreso tra un punto scelto ad arbitrio sulla direttrice e l'intersezione della curva con la parallela condotta per tale punto alla secante), sta al rettangolo formato dalle due parti in cui il medesimo punto divide la direttrice come il quadrato della secante sta al quadrato della direttrice.

Si consideri la curva DFEG (Fig. 9, 10) oppure la curva DHEG (Fig.11), tracciata con l'angolo BAC e gli intervalli HC, HB (scelti a piacere); la sua direttrice è DAE, le secanti FAG (Fig.9, 10) e HAG (Fig. 11); sia poi I un punto qualsiasi della direttrice, e IL la parte della parallela alle secanti FAG o HAG compresa fra il punto I e l'intersezione L con la curva. Io dico che vale la proporzione: $LI^2:(DI \times IE)=FG^2:DE^2$ (oppure : $LI^2:(DI \times IE)=HG^2:DE^2$)

<u>Dimostrazione.</u>

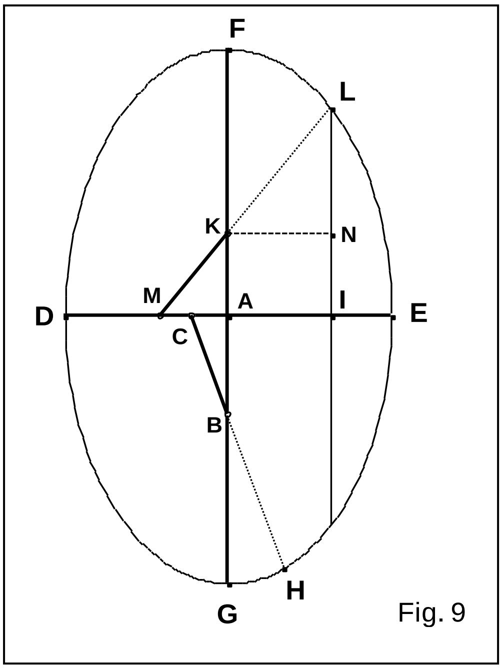


Fig. 9

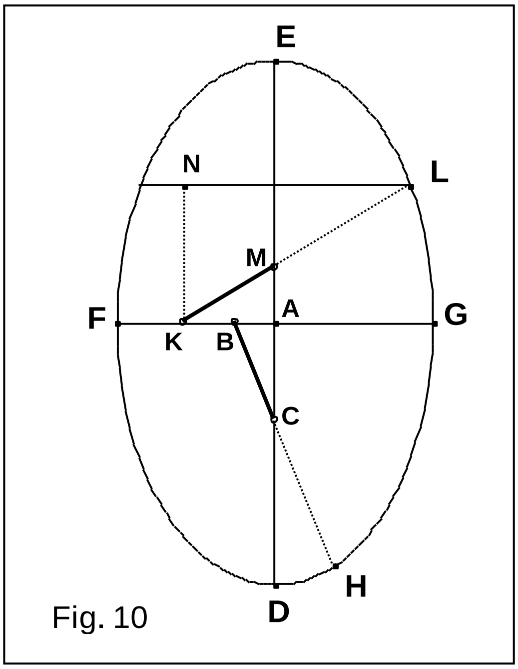


Fig. 10

Supponiamo che la retta tracciante si trovi nella posizione in cui passa proprio per il punto L: sia KM tale posizione.
Supponiamo inoltre che l'angolo BAC sia retto (Fig. 9, 10) Tracciamo KN parallela alla direttrice DE: N sia il suo punto di intersezione con LI (eventualmente prolungata se necessario). Poiché l'intervallo KL è uguale a una metà (AE oppure AD) della direttrice, si potrà scrivere $KL^2=AE^2$ (oppure $KL^2=AD^2$). Togliendo parti uguali ad entrambi i membri (si ricordi che KN = AI) si ha: $KL^2-KN^2=AE^2-AI^2$, cioè

$LN^2 = (AE+AI) \times (AE-AI) = (DI \times IE)$
Ma vale la proporzione: $LI : LN = LM : LK$, quindi è anche $LI^2 : LN^2 = LM^2 : LK^2$, e perciò (per le precedenti uguaglianze) $LI^2 : (DI \times DE) = LM^2 : LK^2$.
Basterà osservare che LM = FA e LK = AE per ottenere
$LI^2 : (DI \times DE) = FA^2 : AE^2 = FG^2 : DE^2$
(ricordare che FG = 2FA e DE = 2AE).
Questo appunto si voleva dimostrare.

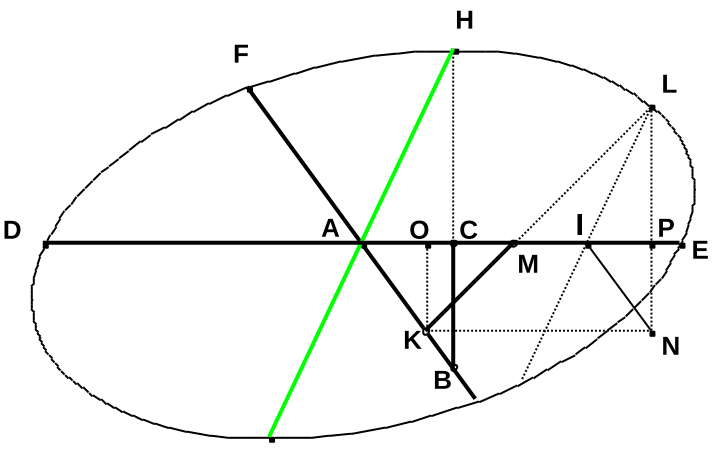


Fig. 11

Supponiamo ora invece che l'angolo BAC non sia retto (Fig. 11). Disegnamo le rette KO e LP parallele alla tracciante BC (in posizione iniziale) fino ad incontrare in O e in P la direttrice (eventualmente prolungata se necessario). Tali rette sono (per definizione: cfr. pag. 7) perpendicolari alla direttrice DE, sicchè la retta parallela al lato AB dell'angolo passante per I (punto scelto a piacere sulla direttrice) incontrerà in N la retta LP (eventualmente prolungata se necessario). I triangoli AHC e ILP sono simili, così pure i triangoli AHB e ILN nonché i triangoli ACB, IPN, AOK, e i triangoli MOK, MLP. Congiungiamo K con N.
Risulta: BA : KA = BC : KO; essendo BC = MK, si può scrivere:
BA : KA = MK : KO. Ma è anche: MK : KO = ML : LP; essendo ML = HC si può scrivere: MK : KO = HC : LP. Siccome poi : HC : LP = HA : LI = BA : NI, si ha infine BA : KA = BA : NI. Quindi KA ed NI (paralleli per ipotesi) sono uguali fra loro. Se ne deduce che anche AI e KN sono fra loro uguali e paralleli.
Valgono, come sappiamo, le uguaglianze: KL = AE = AD. Se ora al quadrato di KL togliamo il quadrato di KN, e al quadrato di AE (oppure al quadrato di AD) togliamo il quadrato di AI, avendo tolto parti uguali, saranno uguali anche i residui. Possiamo allora dire che $LN^2 = AE^2 - AI^2 = (DI \times IE)$ (*)
Dalla similitudine dei triangoli AHB, ILN ricaviamo: $LI^2 : LN^2 = AH^2 : HB^2$, ed essendo HB = AE, $LI^2 : LN^2 = AH^2 : AE^2$. Infine, per la (*) e per il fatto che
HG = 2AH e DE = 2AE $\quad LI^2 : (DI \times DE) = HG^2 : DE^2$, come volevasi dimostrare.

E’ perciò lecito identificare la curva così generata con quella che gli antichi chiamavano **ellisse**. La direttrice e la secante erano da loro detti **diametri coniugati** (o **assi coniugati** nel caso dell’**angolo** retto).
Chiameremo nel seguito **diametri coniugati** due rette passanti per il **centro** e limitate dalla curva tali che valga per esse la proprietà sopra dimostrata per la **direttrice** e la **secante**.
E cioè: il quadrato delle applicate alla prima di esse (scelta ad arbitrio) parallele alla seconda stia al rettangolo avente i lati uguali alle parti generate dall’applicazione sulla prima come il quadrato della seconda sta al quadrato della prima.
La retta su cui le applicate insistono si chiamerà **diametro trasverso**; quella a cui le applicate sono parallele, si chiamerà **secondo diametro**.
Si chiamerà semplicemente **diametro** ogni retta passante per il **centro** delimitata dalla curva.
La retta terza proporzionale rispetto al **diametro trasverso** e al **secondo diametro** si chiamerà **lato retto** relativo al diametro trasverso considerato.
Osserviamo infine che se l’**angolo** è retto e il **punto** è equidistante dagli estremi della **tracciante**, la curva descritta dal **punto** nel modo precedentemente spiegato è una **circonferenza**.

E’ utile tradurre nel linguaggio contemporaneo della geometria analitica le proprietà dimostrate nei precedenti teoremi.

Libro I, Cap. I, Teorema I (parabola). *Si assuma (cfr. Fig. 1, 2, 3, 4) BK come asse x, BC (tangente alla parabola nel vertice) come asse y. (B origine del riferimento). Allora KG = y, BK = x. Posto BD = k (intervallo, oppure lato retto, oppure parametro), la proprietà dimostrata nel teorema I può scriversi:* $y^2=kx$

Libro I, Cap. II, Teorema III (iperbole). *Si assuma (cfr. Fig. 5) GH come asse y, KL come asse x (sono gli asintoti dell’iperbole). F è l’origine del riferimento. Allora FE = x, EC = y. Posto EB = FD = a, AD = b (intervalli) e ab = k (potenza dell’iperbole), la proprietà dimostrata nel teorema III può scriversi:*
$xy = k$.

Libro I, Cap. III, Teorema XII (ellisse). *Si assuma (cfr. Fig. 6, 7, 8 e segg.) DE come asse x, HG come asse y (A, punto di incontro tra DE ed FG, è il centro della ellisse). Posto AI = x, IL = y, DA = AE = a, GA = AH = b (semiassi della ellisse), la proprietà dimostrata nel teorema XII può scriversi:* $y^2:(a-x)(a+x)=4b^2 : 4a^2$ *, ossia*
$y^2:(a^2-x^2) = b^2:a^2$.
Uguagliando il prodotto dei medi a quello degli estremi: $y^2a^2=a^2b^2-b^2x^2$.
Con semplici passaggi, dividendo primo e secondo membro per a^2b^2*, si ha infine:*
$y^2/b^2+x^2/a^2=1$