Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo N° 7

DESCARTES: IL LIBRO II DELLA GEOMETRIA.
SULLA NATURA DELLE LINEE PIANE.

(I brani scritti in corsivo sono di Descartes. Abbiamo utilizzato l'edizione UTET, 1983, della "Geometria", con note e commenti di E. Lojacono).

Parte prima.
Generazione e uso delle curve

Alla fine del primo libro (e all'inizio del secondo) Descartes mette in evidenza che le curve piane possono essere considerate non solo come soluzione di problemi (ad esempio del problema di Pappo), ma anche come mezzo per risolvere, anzi – come egli dice – "**costruire"** problemi.

"*Gli antichi* – dice Descartes – *hanno osservato molto giustamente che i problemi di Geometria sono o piani, o solidi, o lineari*. *Questo significa che gli uni possono essere costruiti tracciando soltanto rette e cerchi* (luoghi piani)*, che altri richiedono invece per la loro costruzione l'uso di almeno qualche sezione conica* (luoghi solidi)*, e che i rimanenti, infine, abbisognano di qualche altra linea più composta* (cioè – nel nostro linguaggio – di grado più elevato).
….Ma non capisco perché abbiano chiamato queste linee più composte Meccaniche piuttosto che Geometriche".

I geometri greci infatti – almeno secondo l'opinione dei matematici del XVII secolo – dicevano "geometriche" solo le linee che si potevano disegnare (per moto continuo) con riga e compasso; quindi solo la retta e il cerchio rientravano (a rigore) nella geometria. Le altre linee – tracciabili con procedimenti più complessi – erano dette "meccaniche".

"*Se si dicesse* – prosegue Descartes – *che le hanno chiamate Meccaniche perché per descriverle è necessario servirsi di qualche strumento, bisognerebbe per la stessa ragione rifiutare i cerchi e le rette, dato che li tracciamo sul foglio soltanto con* *l'aiuto di un compasso e di una riga, che pure si possono dire strumenti. Né si può affermare che le abbiano chiamate Meccaniche perché gli strumenti che servono a misurarle, essendo più composti della riga e del compasso, non possono essere altrettanto esatti: infatti, se così fosse, si dovrebbe escluderle dalle Meccaniche, dove è richiesta la perfezione delle opere che escono dalle mani dell'uomo, piuttosto che dalla Geometria, in cui non si esige che l'esattezza del ragionamento, esattezza che può raggiungersi ragionando tanto intorno a queste linee quanto intorno ad altre".*

E' qui evidente che Descartes intende superare la cultura geometrica degli antichi e procurarsi nuovi strumenti per la risoluzione dei problemi, allargando il numero delle curve utilizzabili regolato fino ad allora dai seguenti postulati (I e III del Libro Primo del trattato di Euclide):

- si può condurre una retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
- si può descrivere una circonferenza con qualsiasi centro e raggio.

Egli sostiene infatti (aggiungendo così un nuovo postulato a quelli euclidei):

"……Per tracciare tutte le curve che qui pretendo introdurre è sufficiente supporre solo questo, che due o più linee possono muoversi l'una ad opera dell'altra, e che le loro intersezioni determinino altre curve".

Poco più oltre ribadisce e precisa:

"….Non devono essere escluse dalla Geometria le linee più composte a preferenza delle più semplici, purché sia possibile immaginarle descritte da un movimento continuo, o da più movimenti che si susseguano l'un l'altro e i seguenti siano interamente determinati dai precedenti".

Non basta dunque che una curva utilizzata per risolvere problemi sia disegnabile per punti: occorre la sua tracciabilità con moto continuo (ad esempio con un ***biellismo*** o un ***sistema articolato***). Tuttavia non sono accettabili come ***geometriche*** (sono cioè da considerarsi ***meccaniche*** e devono essere escluse dalla Geometria) le curve *"descritte da movimenti separati, non aventi tra loro nessun rapporto misurabile esattamente"* (ad es. la Spirale, la Quadratrice, ecc.).

Dopo aver dato come esempio di curve ***geometriche*** quelle generate da uno strumento da lui inventato (il celebre ***"compasso"***: cfr. ***n°* I** della ***Parte seconda***) Descartes afferma:

"…Tutte le curve che possiamo chiamare ***geometriche*** – cioè descritte per moti coordinati nel modo precedentemente chiarito – *stanno necessariamente con tutti i*

punti di una retta in una certa relazione che può essere espressa per tutti i punti per mezzo di ***una singola equazione****"*.

L'insieme delle ***curve geometriche*** coinciderebbe dunque con quello che (per noi) è l'insieme delle ***curve algebriche***. Però Descartes non dimostra questa sua affermazione, che sarà provata solo nel 1876 (***A. B. Kempe, On a general method of describing plane curves of the n degree by linkwork, in "Proc. London Math. Society"***), e non accetta che le curve siano definite dalle equazioni (torneremo su questo punto).

Se l'equazione di una curva – prosegue Descartes – *non sale che al rettangolo di due quantità indeterminate oppure al quadrato di una sola, la curva appartiene al* ***"genere"*** *primo e più semplice, nel quale sono comprese soltanto* – oltre la retta – *il cerchio, la parabola, l'iperbole e l'ellisse.*
Quando l'equazione sale invece alla terza o alla quarta dimensione di due quantità indeterminate, o di una delle due, …., la curva appartiene al secondo ***"genere"***.
Quando poi l'equazione sale fino alla quinta o sesta dimensione la curva appartiene al terzo ***"genere"****: e così all'infinito".*

Ovviamente il termine ***"genere"*** non ha qui il significato che gli viene attribuito nella matematica contemporanea.
Ricordiamo che la scelta (contestata da Fermat) di raggruppare nello stesso ***"genere"*** le curve che hanno equazioni di grado 2n e 2n – 1 fu suggerita a Descartes dal confronto fra queste sue osservazioni:

- per disegnare una curva di equazione F(x,y)=0 si può dare un valore k ad y e poi risolvere l'equazione F(x,k)=0 (si veda il **Fascicolo V**);
- le soluzioni di una equazione di grado 2n e 2n – 1 si possono ottenere intersecando una curva di **grado n** con una circonferenza.

Così Descartes presenta una prima classificazione delle curve (più semplici quelle di ***primo genere***, più complesse – o "composte" – le altre) e, a questo punto del suo discorso, fornisce la descrizione di un **nuovo strumento** (diverso dal ***"compasso"***) con cui è possibile tracciare curve di ***"genere"*** sempre più elevato (cfr. ***n°* II** della ***Parte seconda***).
Riprende poi in esame la trattazione del problema di Pappo (avviata nel Libro I) e dimostra che nel caso di tre o quattro linee rette date il luogo determinato dalle condizioni del problema è necessariamente del primo ***"genere"*** (elaborando così una trattazione completa delle coniche, per la quale rinviamo a ***Fascicoli*** successivi), mentre nel caso di cinque rette si ha una delle curve del secondo ***genere*** tracciate dal suo **nuovo strumento**. (cfr. ancora ***n°* II** della ***Parte seconda***).

Concludiamo con alcune osservazioni:[1]

a) Descartes ritiene (anche in questo caso senza dimostrazione) che tutte le ***curve geometriche*** – cioè quelle tracciabili con moti coordinati secondo la sua definizione – siano anche ***soluzioni del problema di Pappo*** (enunciato relativamente a un opportuno numero di rette):

   "…*Non c'è nessuna curva del primo genere che non sia utile per la soluzione del problema di Pappo quando è proposto per quattro rette, né alcuna del secondo genere che non fornisca una soluzione quando il problema è proposto per otto rette, né del terzo quando è per dodici, e così di seguito. In tal modo non esiste curva commensurabile e quindi geometrica che non possa essere utilizzata* (come soluzione del problema di Pappo) *per qualche numero di rette"*

   Ci sarebbe dunque secondo Descartes (citiamo da ***M. Galuzzi, "Recenti interpretazioni della Géométrie di Descartes", in "Scienza e Filosofia", MI 1985, pagg. 643-663***) perfetta coincidenza tra

   1) curva soluzione del problema di Pappo
   2) curva che ammette una descrizione mediante una equazione algebrica
   3) curva descritta per moti coordinati (moti che si susseguano l'un l'altro e i seguenti siano interamente determinati dai precedenti).

   Ma mentre la coincidenza tra 2) e 3) è stata dimostrata dal Kempe, quella tra 1) e 2) è vera soltanto per le curve di grado minore o uguale a 4, non in generale (si veda ***H. J. M. Bos, On the representation of curves in Descartes' Géométrie, "Archive for History of Exact Sciences", 24, 1981***).

b) Sottolineiamo ancora la differenza (cui abbiamo accennato all'inizio di questo fascicolo) tra le curve tracciate da un meccanismo e quelle ottenute come luoghi geometrici (per es. come soluzione del problema di Pappo). Infatti le prime vengono date come ***"figure"*** e se ne conoscono tutti i punti. Delle altre invece si conosce solo l'***equazione***, dalla quale è possibile ricavare la figura con una costruzione per punti (eventualmente mediante l'utilizzazione di curve già note, di genere inferiore). Soltanto una curva tracciata da un

[1] Non prendiamo in considerazione, per ora, le pagine del libro II dedicate alla ricerca della ***retta tangente*** ad una curva in un punto assegnato e allo studio delle ***curve ovali*** (utili nella ***diottrica*** e nella ***catottrica***).

meccanismo può essere utile come mezzo per la risoluzione dei problemi. Infatti risolvere un problema significa, nella geometria cartesiana, ricavare i segmenti che rappresentano le soluzioni determinando le intersezioni di una curva con rette, circonferenze o coniche. (Cfr., nel ***Fascicolo 5***, la parte dedicata alle equazioni di secondo grado). Tali intersezioni non si possono ottenere con precisione se la curva è tracciata per punti.
Si comprende così la ragione per cui Descartes utilizza il termine "costruire" al posto del nostro "risolvere", e non identifica curve ed equazioni. Egli attribuisce al movimento una funzione definitoria, teoretica (le curve geometriche devono risultare da un movimento ***ininterrotto***: l'equazione non è una rappresentazione sufficiente di una curva); l'algebra ha un ruolo importantissimo, ma subordinato.
Leggendo Descartes, si deve comunque tener presente che per lui la geometria è una "***ars inveniendi***": non è pensata come un sistema ipotetico – deduttivo, sul modello euclideo.

c) Poiché le curve hanno una classificazione naturale in "***generi"***, non è lecito secondo Descartes utilizzare per la soluzione di un problema linee più complesse quando bastano altre più semplici. Egli infatti così inizia il libro III della Geometria, dedicato appunto ai problemi:

"*Benché tutte le curve che possono essere descritte mediante qualche movimento regolare debbano essere accolte in Geometria, non è da dirsi che per questo sia consentito di servirsi indifferentemente della prima che si incontra per la costruzione di ogni problema; al contrario bisogna sempre aver cura di scegliere la più semplice che renda possibile la soluzione del problema. Si deve poi ancora osservare che non debbono essere stimate come più semplici soltanto quelle curve che possono essere descritte più agevolmente, né quelle che rendono la costruzione o la dimostrazione del problema proposto più facile, ma soprattutto quelle che sono del più semplice genere che possa servire a determinare la quantità cercata…. D'altra parte è pure un errore affaticarsi inutilmente a voler costruire qualche problema utilizzando un genere di linee più semplice di quello che la natura stessa del problema consenta"*

Queste raccomandazioni vengono poi illustrate attraverso esempi, usando le curve generate dal "***compasso***" da lui ideato (cfr. ***n° I*** della ***Parte seconda***).

d) Descartes utilizza (nella "***Geometria***"e nella "***Diottrica***") anche altri modi per generare curve attraverso il movimento, diversi da quelli finora considerati:

ad esempio l'***ellisse***, l'***iperbole*** e alcune ***ovali*** (utili per la costruzione di lenti) sono descritte mediante corde.

"*Nonostante in Geometria* – egli afferma (mostrandosi scettico sulla possibilità di rettificare le curve) – *non possano accogliersi linee simili a corde, tali cioè che possan diventare ora rette ora curve (e questo perché non è conosciuta la relazione che sussiste tra le rette e le curve, e non potendo neppure – così almeno credo – divenir mai nota agli uomini, nulla se ne potrebbe concludere d'esatto e di certo) tuttavia, dato che in tali costruzioni ci si serve di corde soltanto per determinare rette la cui lunghezza è perfettamente nota, non v'è motivo che ci imponga di rifiutarle*".

Una delle ragioni che spingono Descartes a servirsi anche di queste nuove tecniche di generazione (utili soprattutto per le curve ovali, e quindi per la costruzione di lenti) è che egli intende mostrare come la sua Geometria non sia soltanto una scienza astratta, ma serva a migliorare le condizioni di vita dell'uomo.

Parte seconda.
Macchine per tracciare curve.

I) Il ***compasso a squadre scorrevoli*** è uno strumento ideale-concreto che produce ***curve geometriche*** (accettabile quindi quanto la riga e il compasso di Euclide). Descartes lo aveva progettato nel 1619 (cfr. "Cogitationes Privatae") e lo ripresenta nel Libro II della "Geometria". Egli si rende conto che non è di semplice realizzazione pratica, che i movimenti (soprattutto se le squadre sono numerose) sono difficoltosi e imprecisi: ma ciò che gli interessa è il funzionamento concettuale.

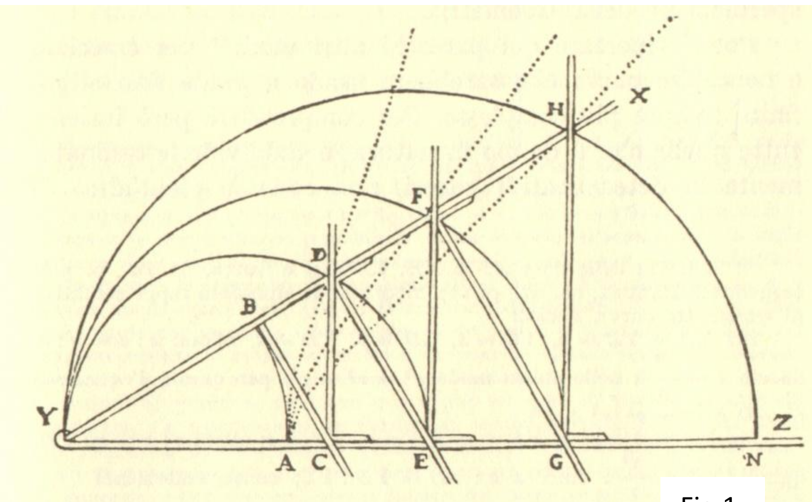

Fig.1

"*Osservate* – dice Descartes: cfr. **Fig. 1** – *le linee AB, AD, AF e simili, che suppongo descritte con l'aiuto dello strumento YZ, composto di parecchi regoli, congiunti in modo tale che, tenuto fermo quello indicato YZ sulla linea AN, si possa aprire e chiudere l'angolo XYZ, e che,* *quando è tutto chiuso, i punti B, C, D, E, F, G, H… siano tutti riuniti nel punto A; ma che, man mano che lo si apre, il regolo BC, che è unito ad angolo retto con XY nel punto B, spinga verso Z il regolo CD che scorre lungo YZ formando sempre con questo un angolo retto. In modo simile CD spinge DE, che scorre ugualmente lungo YX rimanendo parallelo a BC; DE spinge EF; EF spinge FG; questo GH. Possiamo poi concepire una infinità di altri regoli, che si spingano successivamente nello stesso modo, tra i quali alcuni formino sempre gli stessi angoli (retti) con YX e gli altri con YZ. Ora, mentre l'angolo XYZ viene aperto, il punto B descrive la linea AB, che è un cerchio, e le intersezioni degli altri regoli, cioè i punti D, F, H…descrivono altre curve, AD, AF, AH, tra cui le ultime sono nell'ordine più composte della prima, e questa del cerchio. Non vedo però cosa possa impedire che si concepisca la descrizione della prima tanto chiaramente e distintamente quanto quella del cerchio, o, almeno, delle coniche, né ciò che possa impedire che si comprenda la seconda, la terza, e tutte le altre che possiamo descrivere altrettanto bene quanto la prima, né conseguentemente che cosa ci vieti di accoglierle tutte allo stesso modo, per utilizzarle nelle speculazioni della Geometria.*

Nel Libro II della "Geometria" non troviamo le equazioni delle prime tre curve generate dallo strumento di **Fig. 1**(luogo dei punti di intersezione fra l'asta YX e le tre squadre che scivolano sull'asta YZ). Tali equazioni si possono ricavare nel modo seguente:

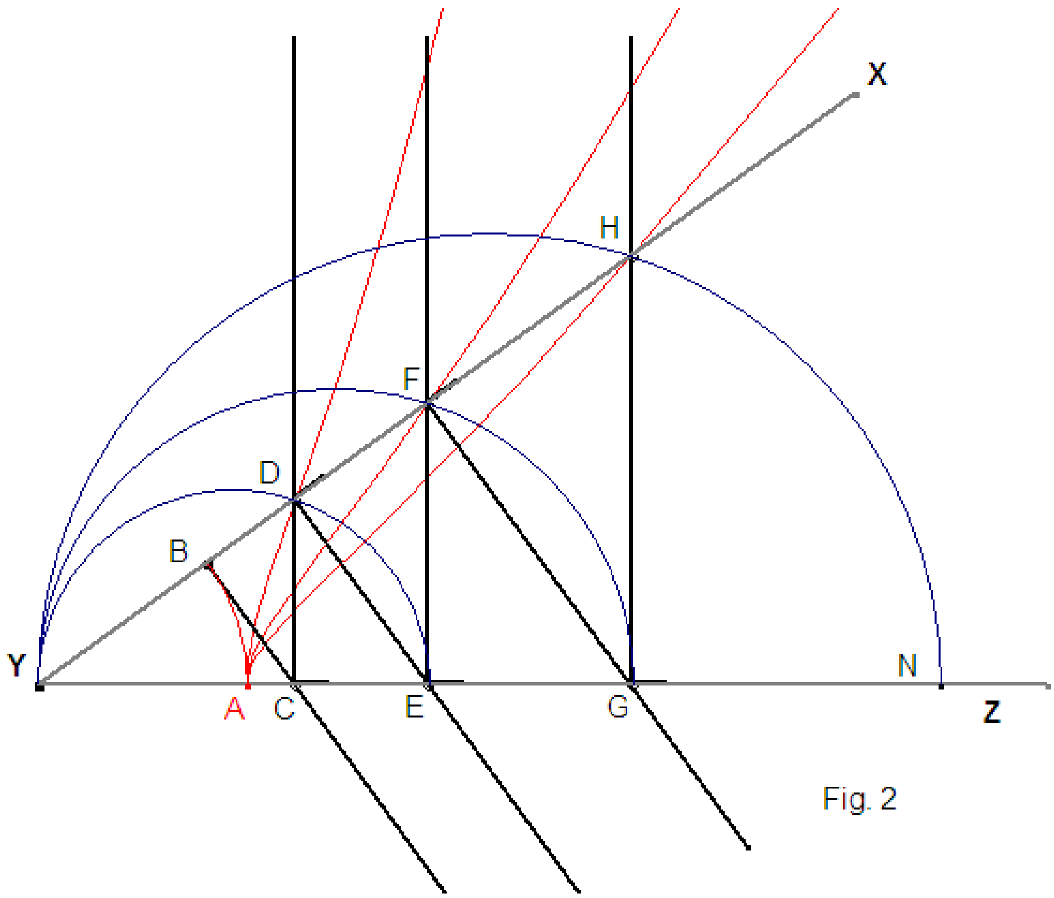

Fig. 2

Sia (**Fig. 2**) YA = YB = $\boldsymbol{a}$; YC = $\boldsymbol{x}$, CD = $\boldsymbol{y}$, YD = **z** (si sono scelti assi ortogonali di origine Y: asse delle ascisse è la retta YZ). Dai triangoli simili YCD, YCB si ricava $\boldsymbol{z : x = x : a}$, quindi $\boldsymbol{z = \frac{x^2}{a}}$. Per il teorema di Pitagora è poi $\boldsymbol{z^2 = x^2 + y^2}$; eliminando **z** si ottiene:

$\boldsymbol{x^4 = a^2(x^2 + y^2)}$ (1) equazione della prima curva (AD).

Sia (**Fig. 2**) YA = YB = $\boldsymbol{a}$; YE = $\boldsymbol{x}$, EF = $\boldsymbol{y}$, YF = **z** (rispetto al caso precedente, il riferimento è immutato). Dai triangoli simili YEF e YED si ottiene $\boldsymbol{z : x = x :} YD$, quindi YD = $\boldsymbol{\frac{x^2}{z}}$ **(*);** ma è anche (triangoli simili YED e YCD $\boldsymbol{x :} YD = YD : YC$.
Allora, ricavando YC e tenendo conto della **(*)**, risulta YC = $\boldsymbol{\frac{x^4}{z^2} : x = \frac{x^3}{z^2}}$ **(**).** I triangoli simili YCD, YCB conducono alla proporzione **z** : YC = YC : $\boldsymbol{a}$, da cui si ha (cfr. **(**)**): $z = \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}}$ **(***).** Infine, utilizzando il teorema di Pitagora ($\boldsymbol{z^2 = x^2 + y^2}$) insieme alla **(***)** possiamo scrivere (dopo facili calcoli):

$\boldsymbol{x^8 = a^2 (x^2 + y^2)^3}$ (2) equazione della seconda curva (AF).

Con analogo procedimento si dimostra che la terza curva (AH) ha equazione:

$\boldsymbol{x^{12} = a^2 (x^2 + y^2)^5}$ (3),

e si potrebbero ricavare anche le equazioni di altre curve generate da ulteriori squadre applicate al “compasso”.
Descartes così conclude la presentazione di questo strumento:

“Potrei riportare qui parecchi altri modi per tracciare e concepire curve che sarebbero grado a grado fino all’infinito sempre più complesse. Per comprendere però insieme tutte quelle che si danno in natura, e suddividerle ordinatamente in determinati generi, non conosco nient’altro di meglio che dire che tutti i punti di quelle curve che possiamo chiamare Geometriche (rispondenti cioè a misure precise ed esatte) stanno necessariamente con tutti i punti di una retta in una certa relazione che può essere espressa per tutti i punti per mezzo di ***una singola equazione.***
Se tale equazione non sale che al rettangolo di due quantità indeterminate, oppure al quadrato di una sola, la curva appartiene al genere primo e più semplice, nel quale sono comprese soltanto il cerchio, la parabola, l’iperbole e l’ellisse. Quando l’equazione sale invece alla terza o alla quarta dimensione di due quantità indeterminate, o di una delle due…. la curva appartiene al secondo genere. E quando

l’equazione sale fino alla quinta o sesta dimensione, la curva appartiene al terzo genere: e così delle altre all’infinito”.

(Sono frasi che abbiamo già riportato e commentato: cfr. ***Parte prima***, pag. 3).

Nel Libro III della “Geometria” si mostra che le curve (1), (2), (3), ecc. possono essere utili per determinare due (o quattro, sei, ecc.) medie proporzionali fra due grandezze assegnate.
Come esempio consideriamo il problema: dati due segmenti **a, b**. si chiede di determinarne altri due (**x, y**) in modo in modo che valgano le proporzioni **a : x = x : y = y : b**. (*)
La soluzione è subito ricavata mediante la curva AD, di equazione (1). Basta costruire lo strumento di **Fig. 1** in modo tale che
YB = YA = **a**; prendere sull’asta YZ un punto E tale che YE = **b**; tracciare una semicirconferenza di diametro YE che intersechi in D la curva (1) preventivamente disegnata (con moto continuo) dallo strumento stesso. Si disporrà poi (cfr. **Fig. 2**) l’asta YX in modo che passi per D. Risulterà allora: YB : YC = YC : YD = YD : YE, cioè (essendo YB = **a** e YE = **b**),
x = YC, **y** = YD, in accordo con la (*).
In modo analogo è possibile inserire quattro o sei medie proporzionali tra a e b utilizzando le curve AF e AH, di equazioni (2) e (3). Ecc.

“*Tuttavia* – osserva Descartes (***cfr.*** nella ***Parte prima,*** a pag. 5***,*** il paragrafo **c**) – *poiché la curva AD è del secondo genere ed è possibile trovare due medie proporzionali mediante l’uso delle sezioni coniche, che sono del primo genere, e poiché è anche possibile trovare quattro o sei linee medie proporzionali mediante curve appartenenti a classi meno complesse di quelle a cui appartengono AF ed AH, usarle in Geometria sarebbe un errore*”.

Qui Descartes allude ad altre soluzioni da lui date a questi problemi. Nel caso dell’inserimento di due medie proporzionali egli usava l’intersezione di una parabola e di una circonferenza, ispirandosi a lavori di Menecmo.

II) Anche l’altro strumento ideale-concreto che troviamo illustrato nel Libro II della “Geometria” serve a tracciare, per moto continuo, curve di ***“genere”*** sempre più elevato. Descartes ci mostra inoltre come risalire dalla costruzione alla equazione (limitandosi però al caso in cui tale strumento produca curve del primo genere).

“*La linea EC* – egli dice – *è descritta* (seguire il discorso osservando la **Fig. 3**) *mediante l’intersezione del regolo GL e della figura piana CNKL, il cui lato KN è prolungato indefinitamente verso C. Questa figura piana è mossa in linea retta sul* *piano verso la parte sottostante (in modo cioè che il suo <u>diametro</u> KL giaccia sempre lungo la linea BA prolungata nell'una e nell'altra direzione) e fa ruotare il regolo GL intorno al punto G, dato che gli è unito in modo da passare sempre per il punto L"*

Abbiamo sottolineato il termine <u>diametro</u>: esso rivela che la figura piana a lati rettilinei CNKL è (come vedremo) un caso particolare delle figure curvilinee che saranno considerate in seguito.

"Per sapere di qual genere è la curva EC, scelgo una retta come AB per riferire ai suoi diversi punti tutti quelli della curva EC, e lungo questa retta AB scelgo un punto A per iniziare da esso tale calcolo".

Dunque, viene qui individuato un sistema di riferimento. Noi diremmo: A è l'origine, AB l'asse delle ascisse; le ordinate sono parallele fra loro, l'asse delle ordinate (sarà specificato in seguito) è la retta GA. Come sempre, il riferimento è strettamente vincolato alla figura: ma Descartes è consapevole che esiste ampia libertà di scelta (benché poi non ne faccia uso: cfr. ***Fascicolo N° 5***). Infatti così prosegue:

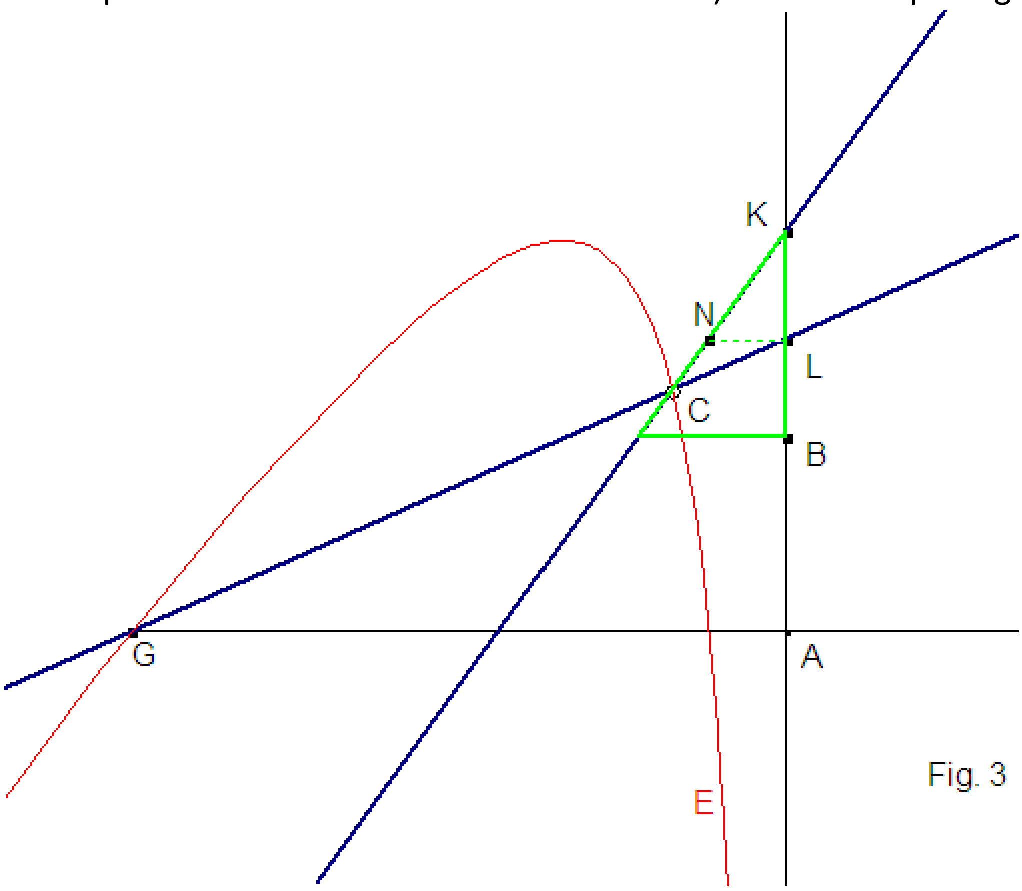

Fig. 3

"Preciso di aver scelto questo punto (A) e quella linea (AB) poiché si è liberi di prenderli a piacere: infatti, per quanto vi sia larga scelta per rendere l'equazione più

breve e più facile, tuttavia, in qualunque modo si prendano, si può sempre far sì che la curva risulti appartenere allo stesso genere, come è semplice a dimostrarsi".

Si giunge quindi a determinare l'equazione di EC:

*"Preso un punto a piacere sulla curva, come C (**Fig. 3**), su cui suppongo applicato lo strumento che serve a tracciarla, conduco da questo punto C la linea CB parallela a GA; dato che CB e BA sono due quantità indeterminate e non conosciute, le chiamo una **y** e l'altra **x**. Al fine però di trovare la relazione che sussiste tra di esse, considero pure le quantità note che determinano la descrizione di questa curva, e precisamente GA che chiamo **a**, KL che chiamo **b**, NL (parallela a GA) che chiamo **c**. Dico quindi che NL : LK = CB : BK, ossia: **c : b = y :** BK. Conseguentemente, BK =* $\frac{b}{c}\boldsymbol{y}$, *BL =* $\frac{b}{c}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}$, *AL =*$\boldsymbol{x}+\frac{b}{c}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}$.

Inoltre: CB : LB = GA : LA, perciò (sostituendo i valori prima determinati): y : $\left(\frac{b}{c}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{a}:\left(\boldsymbol{x}+\frac{b}{c}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\right)$. *Allora, scrivendo che il prodotto del secondo termine per il terzo è uguale al prodotto del primo per il quarto, si ottiene con semplici calcoli l'equazione:*

$$\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{c}\boldsymbol{y}-\frac{c}{b}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \quad (4)$$

Da cui si constata che la linea EC è del primo genere; e , in effetti, non è che una iperbole".

Ma lo strumento può essere modificato sostituendo la figura CNKL (a lati rettilinei) con un'altra. Infatti:

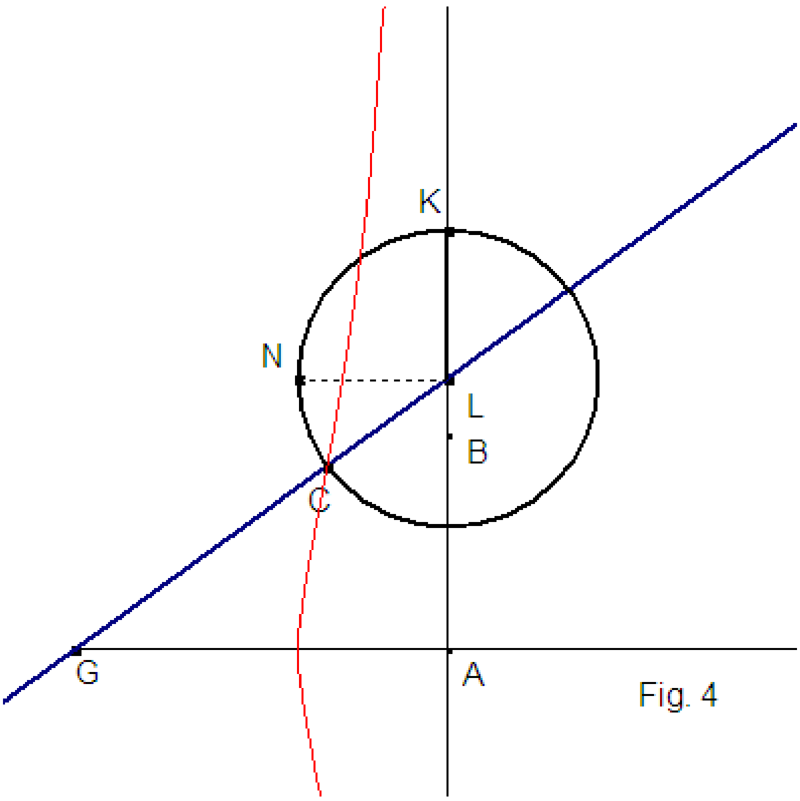

Fig. 4

"Se nello strumento che serve a descrivere la (4) si fa in modo che invece della linea retta CNK sia questa iperbole o qualche altra linea curva del primo genere a delimitare la figura CNKL, l'intersezione di questa linea e del regolo GL in luogo dell'iperbole EC (4), descriverà un'altra curva, che sarà del secondo genere.

*Così se CNK è un **cerchio** con centro in L, si descriverà la prima **concoide** degli antichi.* (**Fig. 4**)

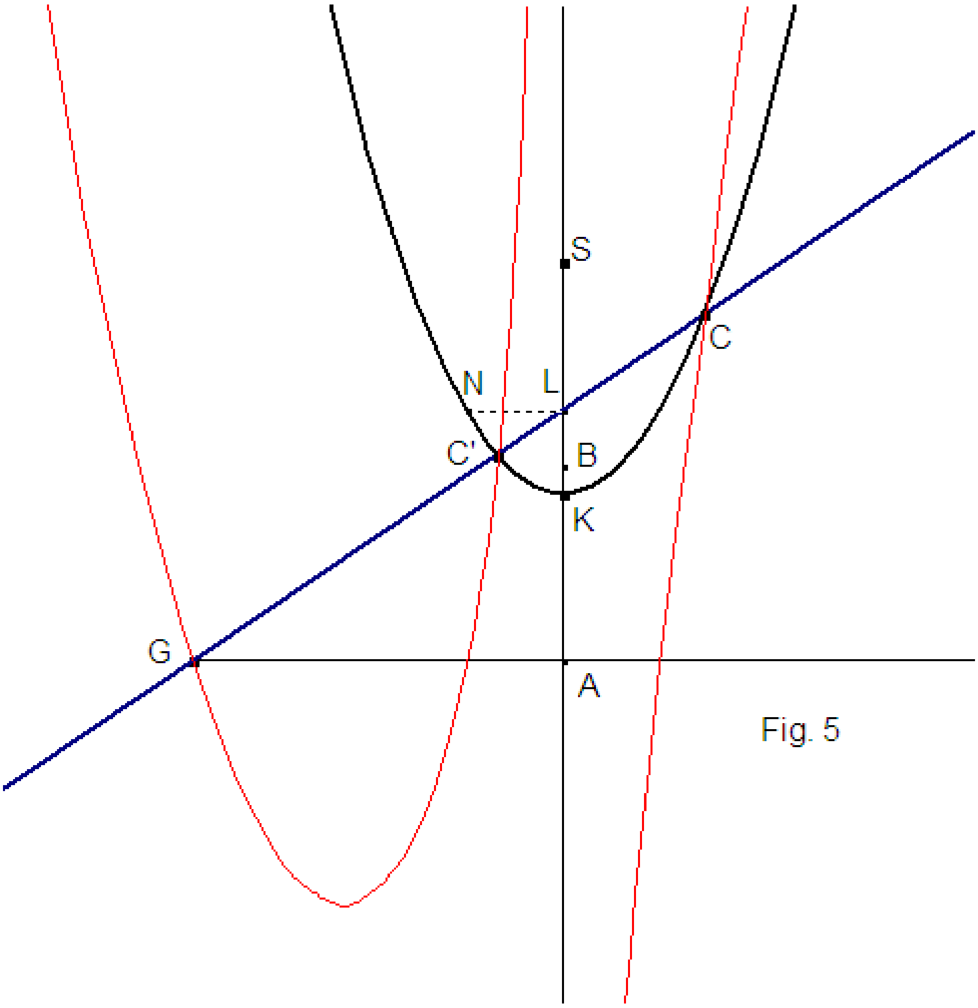

Fig. 5

*Se è una **parabola** avente come diametro KB, (**Fig. 5**) si descriverà la curva che è la prima e la più semplice tra le curve richieste nel problema di Pappo, quando non vi sono che cinque rette date per posizione"*.

Quest'ultima curva è stata chiamata ***parabola cartesiana*** (Loria) o ***concoide parabolica*** (Rabuel).

"Tuttavia se in luogo di una di queste curve del primo genere è una del secondo che delimita la figura CNKL, sarà una curva del terzo genere quella che per suo mezzo verrà descritta; se è una del terzo, una del quarto, e così all'infinito, come mediante il calcolo si può facilmente dimostrare".[2]

---

[2] Gli strumenti generatori di curve presentati da Descartes nella "Geometria" sono stati da noi costruiti (nella versione più semplice). Rinviamo alle relative schede illustrative.

La ***concoide parabolica*** è ripresa in esame nel Libro II della “Geometria” (dopo la trattazione delle coniche).
Descartes – convinto che ciò possa esser fatto per tutte le ***curve geometriche***: cfr. ***parte prima*** del presente fascicolo, pag.4, paragrafo ***a*** – ne ricava l’equazione con due metodi diversi:

- considerandola come luogo geometrico (soluzione di un caso particolare del problema di Pappo)
- considerandola tracciata per moto continuo dallo strumento che abbiamo appena descritto.
-

Diamo qui di seguito i calcoli (seguendo la esposizione di ***P. Freguglia,*** in ***La geometria tra tradizione e innovazione, cap. IV***)

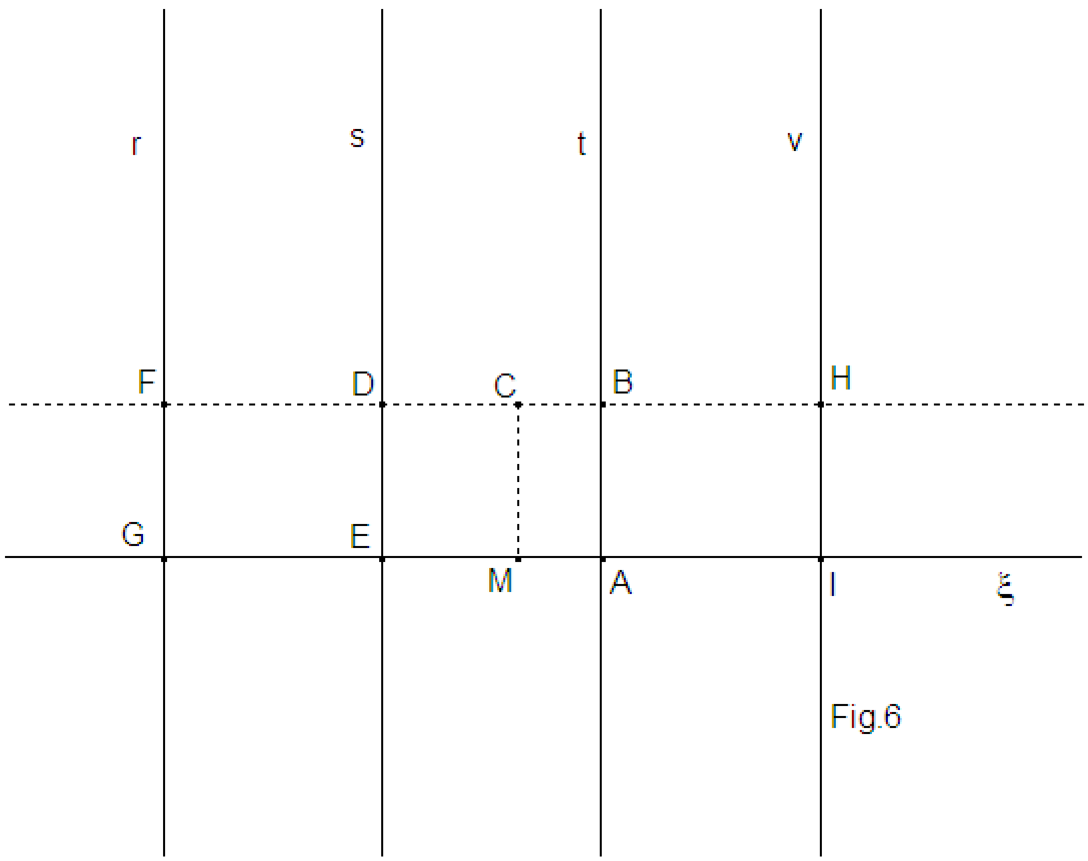

Fig.6

Primo metodo. (**Fig. 6**).
Siano date le rette r, s, t, v tra loro parallele, e la retta ⍰⍰perpendicolare alle precedenti che le intersechi rispettivamente nei punti G, E, A, I. Sia inoltre AI = AE = GE = *a*. Posto CB = y e CM = x abbiamo:

CF = FB – CB = *2a – y*
CD = DB – CB = *a – y*

CH = CB + BH = $a + y$

e, in base all'impostazione del problema di Pappo[3]:

CF×CD×CH = CB×CM×DB, cioè:

$(2a - y)(a - y)(a + y) = yxa$

e quindi l'equazione

$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$ (5).

[3] Nel Fascicolo V abbiamo visto la soluzione cartesiana del problema di Pappo nel caso di quattro rette assegnate, avvertendo tuttavia che tale soluzione può essere estesa a un numero qualsiasi di rette. Invece Pappo è legato a una interpretazione intuitivo-concreta del prodotto di segmenti. Infatti, nel brano citato da Descartes e da noi riportato parzialmente nel Fascicolo V, egli così prosegue:
*"… Se da un punto si conducono a cinque rette date per posizione altre rette ad angoli dati e se è pure dato il rapporto del solido (parallelepipedo rettangolo) compreso fra tre delle linee condotte e il solido (parallelepipedo rettangolo) compreso tra le altre due e una qualsiasi linea data (*nell'esempio di Fig. 6 quest'ultima linea è AI = AE = GE = a*), il punto si troverà su una linea data per posizione. Se poi si tratta di sei linee e se è dato il rapporto del solido che è compreso fra tre linee e quello compreso fra le altre tre, il punto si troverà ancora su una linea data per posizione. Qualora si tratti poi di più di sei linee, non si può dire se sia dato il rapporto tra qualcosa compreso tra quattro linee e qualcosa compreso tra le altre, poiché non vi è alcunché che possa esser contenuto in più di tre dimensioni".*

Secondo metodo. (**Fig. 7**).

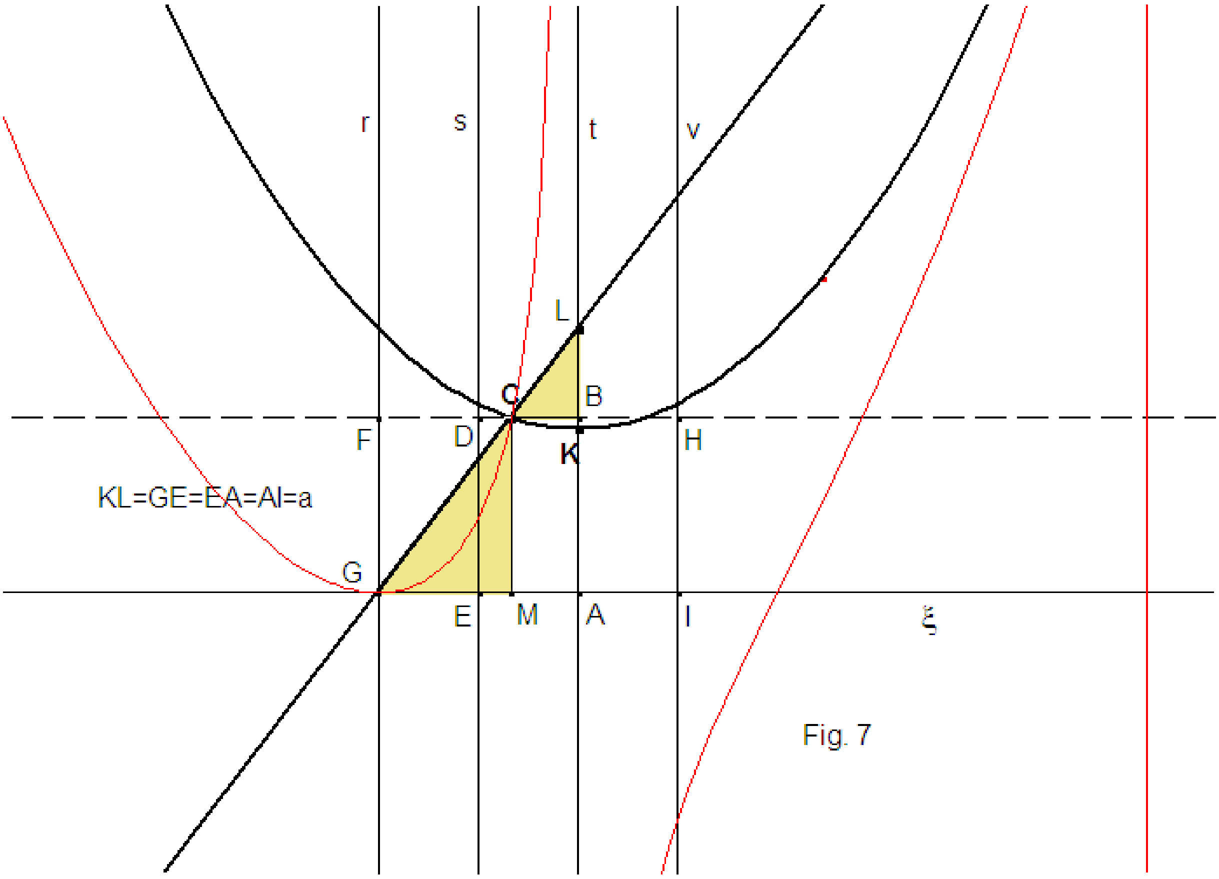

Fig. 7

Alla (5) si può arrivare seguendo la via della costruzione per intersezioni tra due curve date che si muovono secondo regole assegnate.
Si consideri la parabola CNK in cui sia KL = a, essendo K il vertice ed L il fuoco. Il luogo viene generato dai punti intersezione della parabola con la retta GL, quando la parabola scorre lungo il suo asse t avendo solidale con la retta GN il punto L ed essendo G fissato e centro della rotazione di GN.
Questa rotazione è subordinata allo scorrimento della parabola lungo t. Dalla similitudine fra i triangoli GMC e CBL otteniamo:
GM : MC = CB : BL, e in base alle posizioni fatte $(2a - y): x = y: BL$, da cui $BL = xy:(2a - y)$. Inoltre:

$$BL = LK - BL = a - [xy:(2a - y)] = (2a^2 - ay - xy):(2a - y)$$

Siccome KL = a è il ***lato retto*** della parabola, risulta BK : BC = BC : KL, da cui sostituendo si ha (sempre per le posizioni fatte):
$[(2a^2 - ay - xy):(2a - y)]: y = y: a$
che, sviluppando i calcoli, coincide con la (5).