Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo *N° 6*

CONICHE COME LUOGO DI PUNTI

IL LIBRO VII DEL TRATTATO SULLE CONICHE DI DE L'HOSPITAL.

I. Introduzione

(*Abbiamo utilizzato l'edizione 1720 dell'opera di De L'Hospital "Traité analytique des Sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez q'indéterminez****")***

Il trattato sulle coniche di De l'Hospital (prima edizione 1707) è stato scritto circa 70 anni dopo la "Geometria" di Descartes. Tutte le innovazioni cartesiane (cfr. Fascicoli V e VII) sono accettate anche da De L'Hospital: estensione ai segmenti dell'aritmetica dei numeri, uso delle notazioni algebriche in geometria, rottura del vincolo dell'omogeneità, introduzione del movimento e dei meccanismi nel discorso teorico. liberazione dalla figura (passaggio dalla curva costruzione alla curva equazione).
La lettura del libro VII del trattato di De L'Hospital è interessante perché ci mostra che mentre, da un lato, il calcolo algebrico si è reso autonomo con molta lentezza dalla necessità di trovare conferma nella interpretazione geometrica, dall'altro è stato definitivamente rotto il legame (in precedenza molto saldo) tra la figura costruita e il sistema di riferimento che consente di scriverne l'equazione: De L'Hospital infatti, dopo aver scelto gli assi di riferimento, posiziona rispetto ad essi la figura di cui vuol scrivere l'equazione in modo completamente arbitrario.

II. Letture e commento.

Scriveremo d'ora in poi in carattere corsivo i brani estratti (e tradotti in lingua italiana) dal "Traitè analytique des Sections coniques".
Il Libro VII si intitola "*Sui luoghi geometrici*", che vengono così definiti (Libro VII, Definizione I):

"*Siano date due rette* (leggi – al solito – segmenti) *incognite e indeterminate AP, PM le quali formino fra loro un angolo assegnato o scelto in modo arbitrario; l'una,* *AP, che chiamerò sempre x, abbia origine fissa in A e si estenda indefinitamente lungo una direzione prefissata; l'altra, PM, che chiamerò y, cambi continuamente ma sia sempre parallela a se stessa: cioè, tutte le rette PM dovranno essere parallele fra loro. Sia inoltre una equazione formata da queste due incognite x e y insieme ad altre rette note e che esprima la relazione che lega ogni indeterminata AP (x) alla corrispondente PM (y). La linea retta o curva che passa per le estremità di tutti i valori di y, cioè per tutti i punti M, è chiamata in generale un luogo geometrico, e in particolare il luogo di una determinata equazione".*

De L'Hospital definisce poi i valori positivi (*veri*) e quelli negativi (*falsi*) di x e y: affermando che un luogo deve passare per le *estremità di tutti i valori (sia veri che falsi)* dell'incognita y che corrispondono a valori (sia veri che falsi) dell'incognita x. (Si noti la locuzione "*estremità dei valori*": è evidente che y – e anche x – sono pensati come segmenti).
Ma scrive subito dopo questa avvertenza (Libro VII, paragrafo 304):

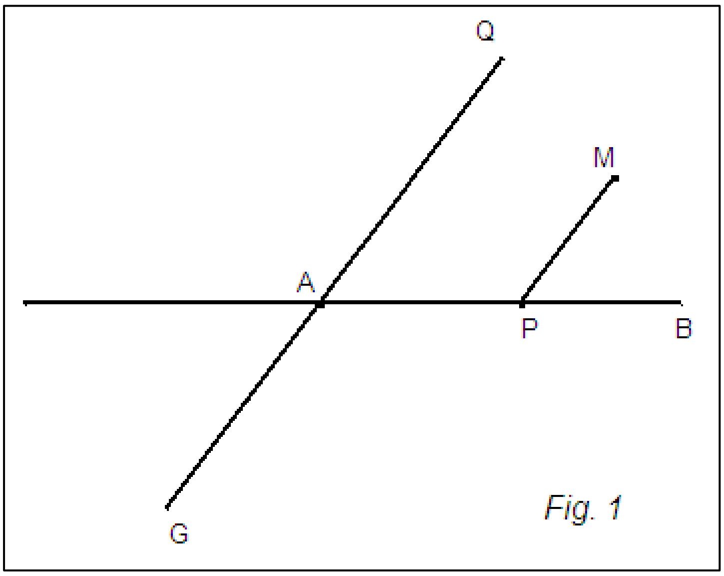

Fig. 1

"Quando si tratterà nel seguito di costruire il luogo di una equazione assegnata, si supporrà sempre che AP e PM (x e y) siano positivi. Cioè, tracciata una retta QAG parallela a PM (e passante per il punto fisso A) (cfr. Fig. 1) *si supporrà che tutti i punti M cadano entro l'angolo BAQ. Si sceglierà come luogo dell'equazione assegnata la porzione di curva racchiusa in quest'angolo".*

Detto questo, enuncia il primo **Lemma fondamentale** (Libro VII, paragrafo 308) suddiviso in due parti:

" ***Parte prima****. Si considerino, come previsto dalla Definizione I, due rette incognite e indeterminate AP (x) e PM (y); inoltre, siano assegnate le rette* ***e, m, n, p, r, s****.(con valori positivi). Ciò posto (cfr. Fig. 2):*

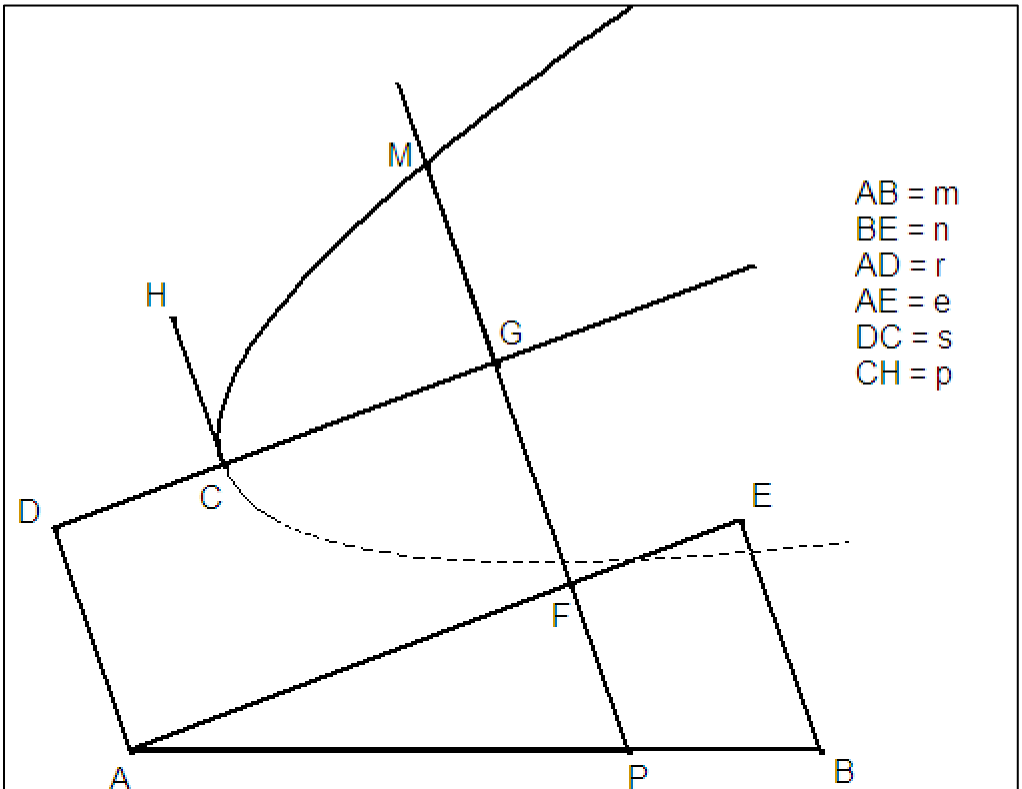

Fig. 2

Si prenda su AP la parte AB = ***m****; dopo aver tracciato i segmenti BE =* ***n****, AD =* ***r*** *concordi e paralleli a PM, si congiunga A con E ponendo AE =* ***e****. Si faccia poi uscire dal punto D la retta DG parallela ad AE, e su questa DG si prenda la parte DC =* ***s*** *(nel verso individuato da PM)*

(Su DG si troverà il diametro della curva; C sarà il vertice relativo a tale diametro)

Si costruisca infine (**con riga e compasso: cfr. Fascicolo II**) *la parabola CM avente come diametro CG, come parametro p = CH e le ordinate parallele a PM. Questa parabola si estende nel verso individuato da AP.*
Io dico che la parte di tale parabola racchiusa nell'angolo PAD (formato da AP e da una linea AD uscente da A parallelamente a PM e nel medesimo verso) è il luogo geometrico rappresentato dalla seguente equazione:

(1) $$y^2 - 2\frac{n}{m}xy + \left(\frac{n}{m}\right)^2 x^2 - 2ry + \left(\frac{2nr - ep}{m}\right)x + (r^2 + ps) = 0$$

Si tracci infatti, a partire da un punto qualsiasi M di questa parte di parabola, la retta MP che faccia con AP l'angolo dato APM e che incontri nei punti F, G le parallele AE, DG; i triangoli simili ABE, APF forniscono le due proporzioni:
*AB(**m**) : AE(**e**) = AP(**x**) : AF* (***2***)
*AB(**m**) : BE(**n**) = AP(**x**) : PF* (***3***)
*Dalla (**2**), essendo AF = DG, si ricava:* $DG = \frac{ex}{m}$ *; dalla (**3**):*

$PF = \frac{nx}{m}$

Conseguentemente:

GM = PM – PF – FG = $y - \frac{nx}{m} - r$ ***(&)***

CG = DG – DC = $\frac{ex}{m} - s$ ***(&&)***

Ma la parabola è caratterizzata dalla relazione **(cfr. Fascicolo II)***:*
$GM^2 = CG \times CH$ ***(*)****, con CH =* ***p****;*
sostituendo in questa i valori ***(&)*** *e* ***(&&)****si ricava la (**1**).*

Si noti che il sistema di riferimento implicitamente usato per scrivere la **(*)** è diverso da quello scelto inizialmente, rispetto al quale è scritta la **(1).** Perciò **(&)** e **(&&)** si possono interpretare come formule che individuano un cambiamento di coordinate.

Parte seconda. *Si considerino ancora (come previsto dalla Def. 1) le due rette AP (x) e PM (y) (**Fig. 3**). Partendo dal punto fisso A si tracci la retta AQ parallela e concorde a PM; su AQ si prenda AB =* ***m;*** *sia poi BE =* ***n*** *parallelo e concorde ad AP; congiungendo i punti A ed E si ponga AE =* ***e****.*
Presa infine su AP la parte AD = ***r,*** *si conduca la retta DG parallelamente ad AE, e su tale retta si collochi DC =* ***s*** *(in verso concorde a PM).*

(Su DG si troverà il diametro della curva; C sarà il vertice relativo a tale diametro. In questa seconda parte del lemma la costruzione è stata eseguita in modo tale da produrre un cambiamento di direzione nel diametro della curva).

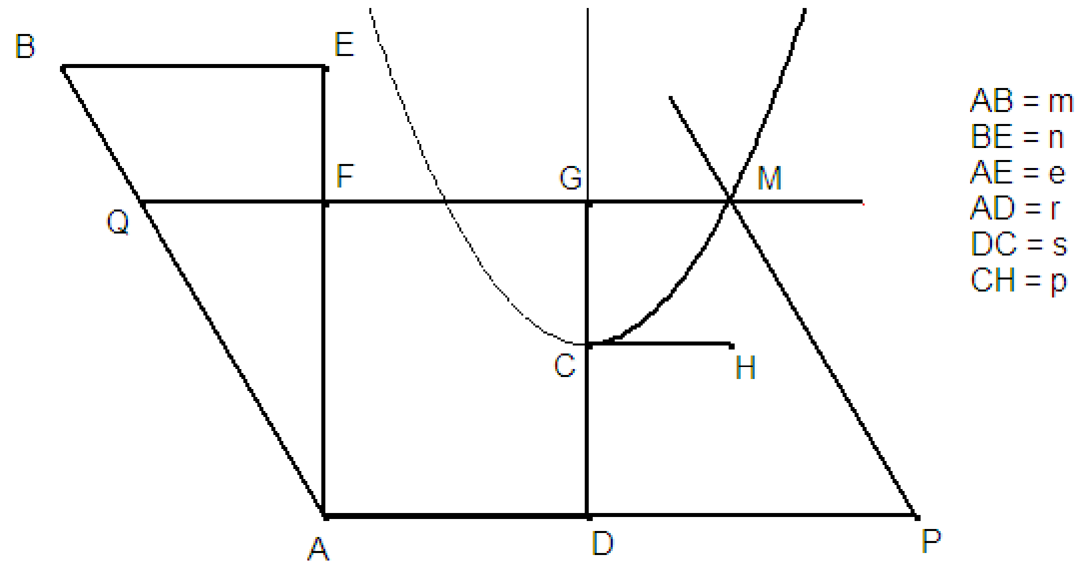

Fig. 3

Finalmente si costruirà (**con riga e compasso: cfr. Fascicolo II**) *la parabola CM avente come diametro CG, come parametro CH =* ***p****, e le ordinate parallele ad AP. Questa parabola si estenderà nel verso individuato da AQ.*
Io dico che la parte della parabola racchiusa nell'angolo BAP è il luogo geometrico rappresentato dalla seguente equazione:

(4) $$x^2 - \frac{2n}{m}xy + \left(\frac{n}{m}\right)^2 y^2 - 2rx + \left(\frac{2nr - ep}{m}\right)y + (r^2 + ps) = 0$$

Si tracci infatti, a partire da uno qualsiasi dei punti M, la linea MQ parallela ad AP la quale incontri nei punti F e G rispettivamente le rette parallele AE, DG; dai triangoli simili ABE, AQF si ricaveranno le proporzioni:
*AB(****m****) : AE(****e****) = AQ(****y****) : AF (****5****)*
*AB (****m****) : BE(****n****) = AQ(****y****) : QF (****6****)*

*Dalla (****5****), essendo AF = DG, si ricava DG =* $\frac{ey}{m}$*; dalla (****6****)*

QF = $\frac{ny}{m}$.
Conseguentemente:

GM = QM – QF – FG = $x - \frac{n}{m}y - r$ ***(&)***

CG = DG – DC = $\frac{e}{m}y - s$ ***(&&)***

Poiché la parabola è caratterizzata dalla relazione:
$GM^2 = GC \times CH$ ***(*)*** *(con CH =* ***p****), sostituendo in questa i valori* ***(&)*** *e* ***(&&)****si ricava la (****4****)".*

Vale anche qui l'osservazione già fatta: il sistema di riferimento implicitamente usato per scrivere la **(*)** è diverso da quello scelto inizialmente, rispetto al quale è scritta la **(4).** Perciò **(&)** e **(&&)** si possono interpretare come formule che individuano un cambiamento di coordinate.

De L'Hospital dunque, dopo aver scelto l'origine (*A*) e la direzione degli assi, colloca nel piano (con l'aiuto di segmenti opportunamente predisposti ***m, n, e. r, s ,p***), in posizione del tutto arbitraria rispetto agli assi di riferimento, un diametro della curva, il vertice e il parametro relativi a tale diametro. A questo punto, come abbiamo visto, può sia disegnare la curva per punti (col procedimento da lui spiegato nel Libro I, che utilizza il sintomo di Apollonio, cioè la proprietà caratteristica della curva), sia scriverne l'equazione (servendosi del medesimo sintomo).
Il rapporto tra curva come figura e curva come equazione appare con evidenza. La configurazione tipica degli assi cartesiani – osservava R. Thom – evoca irresistibilmente una mascella pronta a chiudersi sulla preda (l'origine è una immagine residua del corpo del predatore). La figura, catturata, ci viene restituita (irriconoscibile) come equazione.

Nelle pagine successive, De L'Hospital, attraverso una serie di proposizioni, problemi, note ed esempi insegna a risalire dall'equazione alla figura (e alla sua posizione rispetto al riferimento).
Osserva ad esempio che nelle equazioni **(1)** e **(4)** i termini di secondo grado formano un quadrato perfetto, e che da ciò si riconosce la parabola.
Esamina poi ciò che accade quando i valori di alcuni dei segmenti ***m, n, e, r, s, p*** sono nulli (e anche quando sono negativi: recuperando in quest'ultimo caso come appartenenti al luogo anche le parti della curva non comprese negli angoli *PAD* o PAB)
Ad esempio, se *BE* = ***n = 0*** la linea *AE* cade su *AB* (cfr. Fig. 2, che illustra la parte prima del Lemma) e si avrà ***m = e.*** L'equazione **(1)** diventa:

(7) $y^2 - 2ry - px + (r^2 + ps) = 0$

La posizione della parabola rispetto agli assi è rappresentata in questo caso dalla Fig. 4.

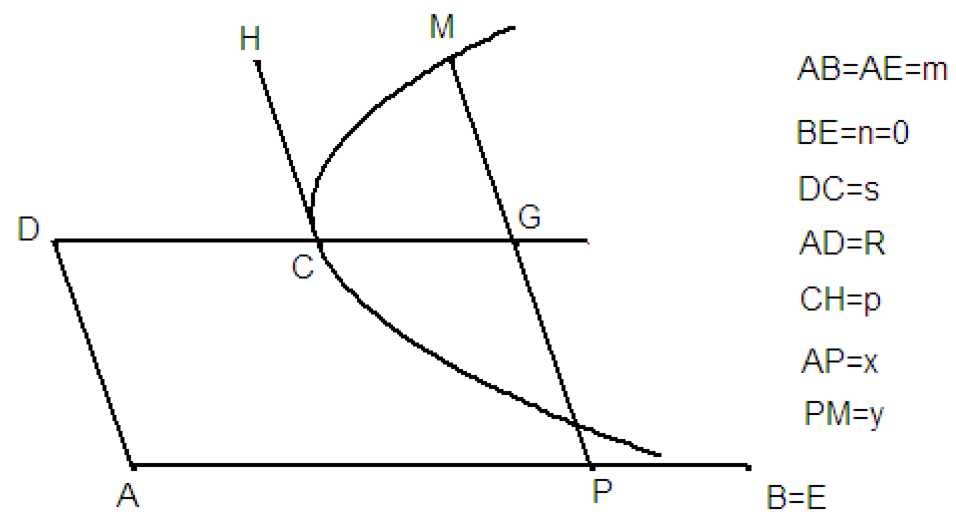

Fig. 4

Se poi è anche **r = s = 0**, l'equazione (**1**) diventa

(8) $y^2 - px = 0$

e la posizione della parabola rispetto agli assi è rappresentata dalla Fig. 5.

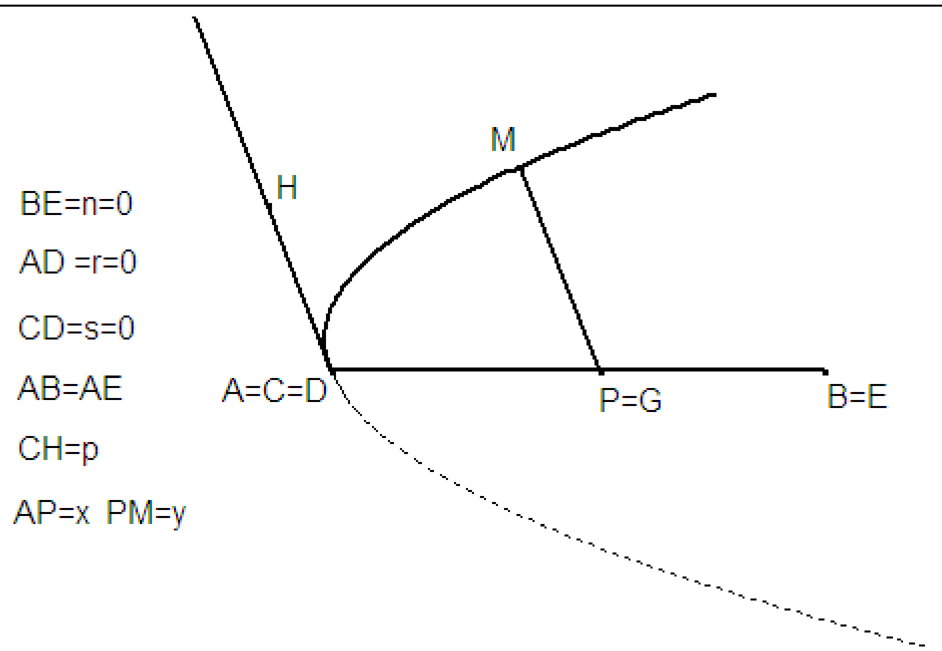

Fig. 5

Un altro esempio. Nelle figure precedenti, si è supposto ***p* > *0***: se ***p*** < ***0***, la parabola rivolgerà la sua concavità dalla parte opposta
Infine, confrontando con le equazioni **(1)** o **(4)** un'altra equazione dello stesso tipo, ma (noi diremmo) con coefficienti diversi, si ricaveranno i valori di ***m, n, e, r, s, p*** (noi diremmo: applicando il principio di identità dei polinomi) e così la parabola potrà essere collocata nella giusta posizione. (Si ricordi che i termini "coefficiente", "polinomio" non erano all'epoca ancora in uso).

Il secondo ***Lemma fondamentale*** del Libro VII (paragrafo 322), è dedicato all'ellisse e alla circonferenza. Diamo subito la parola a De L'Hospital (anche qui, come nel caso del primo lemma, per illustrare il discorso abbiamo utilizzato figure eseguite da noi, simili a quelle originali):

"*Siano assegnate – come nel caso precedente – due rette incognite e indeterminate AP (x) e PM (y) formanti fra loro un angolo arbitrario; siano inoltre assegnate le rette* (leggi sempre: segmenti) ***m, n, p, r, s, t***. .(Si assume, inizialmente, che tali segmenti abbiano valori positivi)

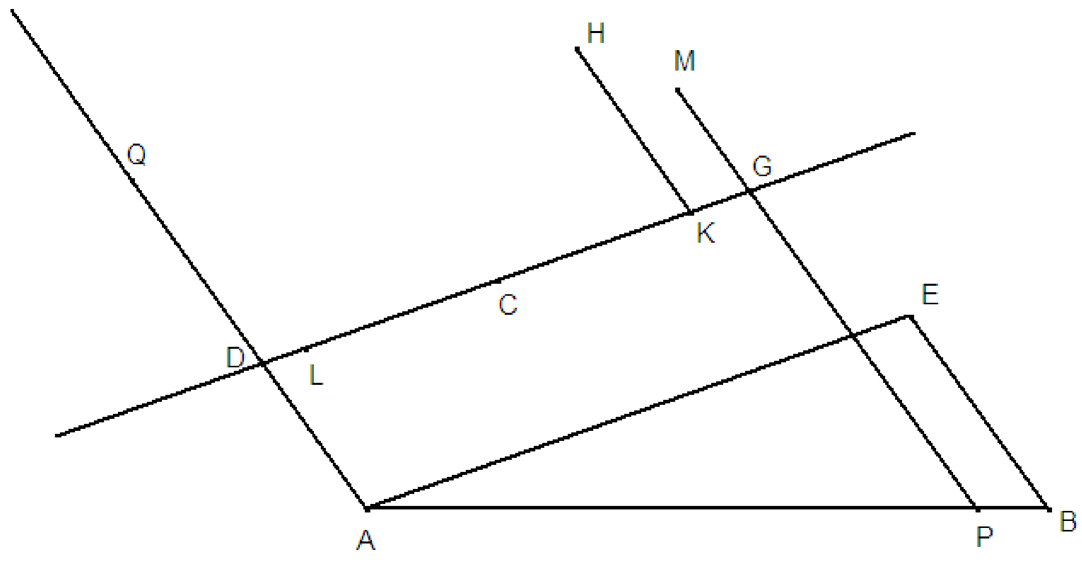

Fig. 6

Ciò posto (cfr. Fig. 6) si prenderà sulla linea AP la parte AB = ***m****; tracciate le rette BE =* ***n****, AD =* ***r*** *parallele a PM (e dalla stessa parte rispetto a PM) si congiungerà A con E, ponendo AE =* ***e****. Poi, si condurrà per il punto D la parallela DG ad AE, su cui si prenderà la parte DC =* ***s*** *(verso la parte in cui si trova PM). Da una parte e dall'altra di C si prenderanno poi le parti CK e CL, entrambe uguali a* ***t****.*

(LK – giacente sulla retta DG – sarà il diametro della curva; C il centro).

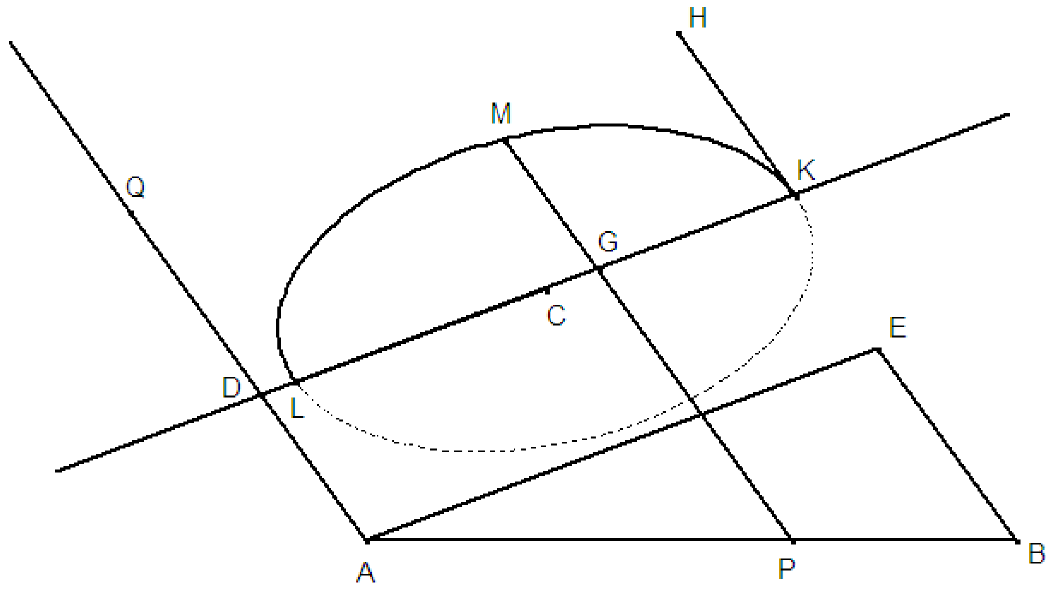

Fig. 7

Si descriverà ora **(con riga e compasso: cfr. Fascicolo III)** *una ellisse che abbia diametro LK = 2t, come parametro KH = p, e le ordinate relative al diametro parallele a PM.* (Cfr. Fig. 7). *Io dico che la parte OMR di questa ellisse racchiusa nell'angolo PAD formato dalla linea AP e da un'altra linea AD condotta per il punto fisso A parallelamente a PM (e concordemente a PM) sarà il luogo rappresentato dalla seguente equazione:*

(9) $$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \left(\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2 p}{2m^2 t}\right)x^2 - 2ry + \left(\frac{2nr}{m} - \frac{2esp}{2mt}\right)x + r^2 + \frac{ps^2}{2t} - \frac{pt}{2} = 0$$

Si tracci infatti da un punto qualunque M di questo arco di ellisse, la retta MP che formi con AP l'angolo APM (inizialmente scelto o assegnato), e che incontri le parallele AE, DG nei punti F e G.
(Cfr. Fig. 8).

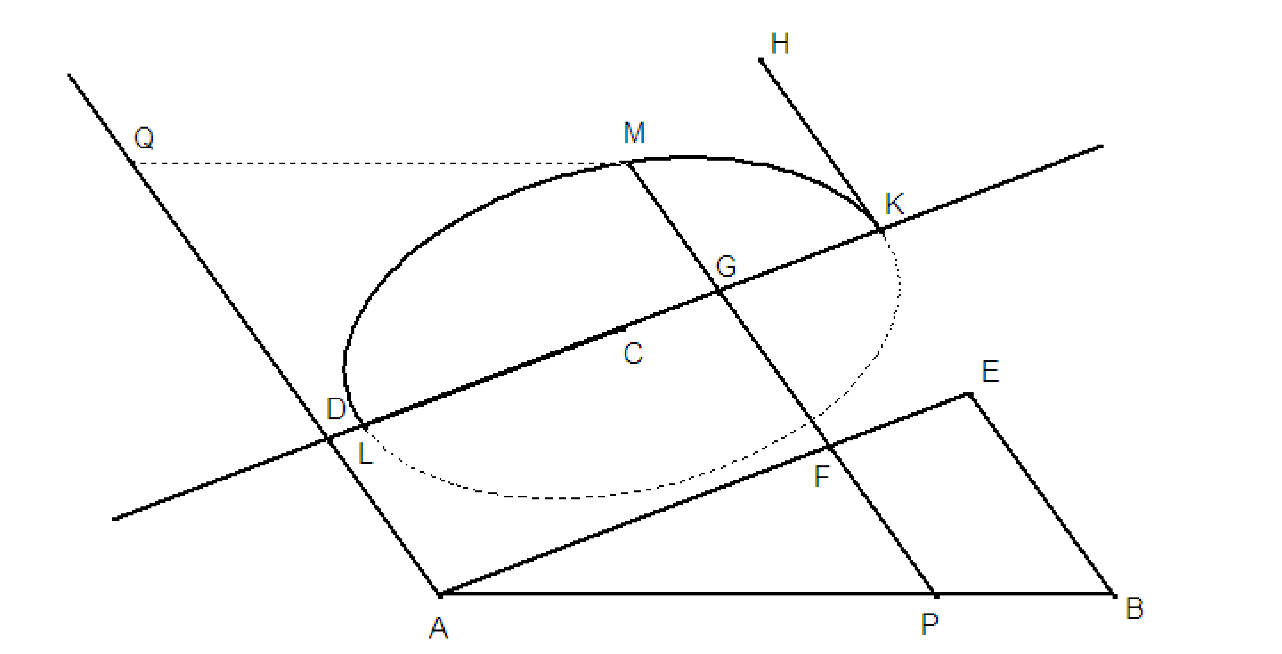

Fig.8

Dai triangoli simili ABE, APF si ricava AF = DG = $\frac{ex}{m}$*, PF =* $\frac{nx}{m}$

(ricordare che AE = ***e****, AB =* ***m****, AP =* ***x****, BE =* ***n****).*

Si ha poi GM = PM – PF – FG, quindi (essendo FG = AD = ***r, PM = y,*** *PF =* $\frac{nx}{m}$*):*

GM = $y - \frac{nx}{m} - r$ **(10)**

Infine, KG = t – CG, CG = DG – s. Essendo DG = $\frac{ex}{m}$ *risulta allora:*

KG = $t - \frac{ex}{m} + s$. **(11)**

Il sintomo (proprietà caratteristica dell'ellisse) si scrive:

(**12**) $GM^2 = pGK - \frac{p}{2t}GK^2$

*Sostituendo in **(12)** i valori **(10)** e **(11)** ricavati in precedenza si ha:*

$$\left(y - \frac{nx}{m} - r\right)^2 = p\left(t - \frac{ex}{m} + s\right) - \frac{p}{2t}\left(t - \frac{ex}{m} + s\right)^2 \qquad (13)$$

Eseguendo i calcoli si riottiene la **(9)***, equazione del luogo cercato.*

Se accade che il diametro KL (2t) e il relativo parametro KH (p) siano uguali fra loro, la **(12)** *si scrive:* $GM^2 = KL \times GK - GK^2$*, cioè:* $GM^2 = LG \times GK$

Da ciò segue che l'angolo CGM è sempre un angolo retto, quindi l'ellisse diventa una circonferenza di diametro KL.

Si noti che il sistema di riferimento implicitamente usato per scrivere la **(12)** è diverso da quello scelto inizialmente, rispetto al quale è scritta la **(9).** Perciò **(10)** e **(11)** si possono interpretare come formule che individuano un cambiamento di coordinate.

Nelle pagine successive, De L'Hospital completa e arricchisce il discorso.
Come riconoscere, data una equazione di secondo grado in x e y, se essa rappresenta una ellisse? Egli osserva che intanto i quadrati x^2 e y^2 hanno sempre il medesimo segno; quando poi è presente il termine in xy,

la metà della frazione che lo moltiplica, elevata al quadrato, deve essere minore della frazione $\left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{e^2p}{2m^2t}\right)$ *che moltiplica* x^2*.*

(Si noti che De L'Hospital non usa il termine "coefficiente"). Noi esprimeremmo la medesima condizione in modo più rapido: il discriminante della equazione $k^2-\frac{2n}{m}k+\left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{e^2p}{2m^2t}\right)=0$ (dove $k=\frac{y}{x}$ è minore di zero.

Osserviamo (usando il nostro linguaggio) che:

- Nella **(9)** i coefficienti sono espressi mediante operazioni aritmetiche (cfr. ***Descartes, Libro I della "Geometria"***) eseguite su segmenti assegnati (***m, n, e, t, p, r, s***): devono essere quindi interpretati come lunghezze di segmenti.
- Data una equazione del tipo **(9)**, ma con coefficienti diversi, applicando il principio di identità dei polinomi è possibile determinare i segmenti ***m, n, e, t, p, r, s*** e quindi ricavare la posizione della ellisse rispetto al sistema di riferimento.

Se **n** = 0, allora **m = e**: l'equazione diventa

$$y^2+\frac{p}{2t}x^2-2ry+\frac{sp}{t}x+r^2+\frac{ps^2}{2t}-\frac{pt}{2}=0$$

(il diametro è parallelo all'asse delle ascisse). (Cfr. Fig. 9)

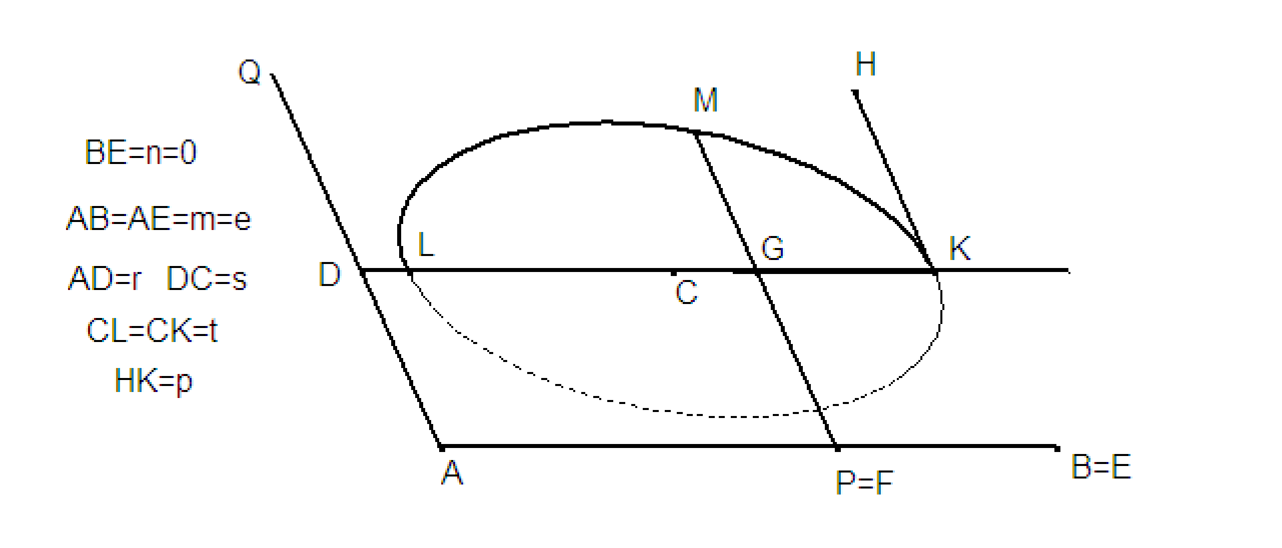

Fig.9

Se, oltre ad essere **n** = 0 (**m = e**) è anche **s = r =** 0, allora il centro è nell'origine. Si ha l'equazione:

$y^2 + \frac{p}{2t}x^2 = \frac{pt}{2}$ (Cfr. Fig. 10).

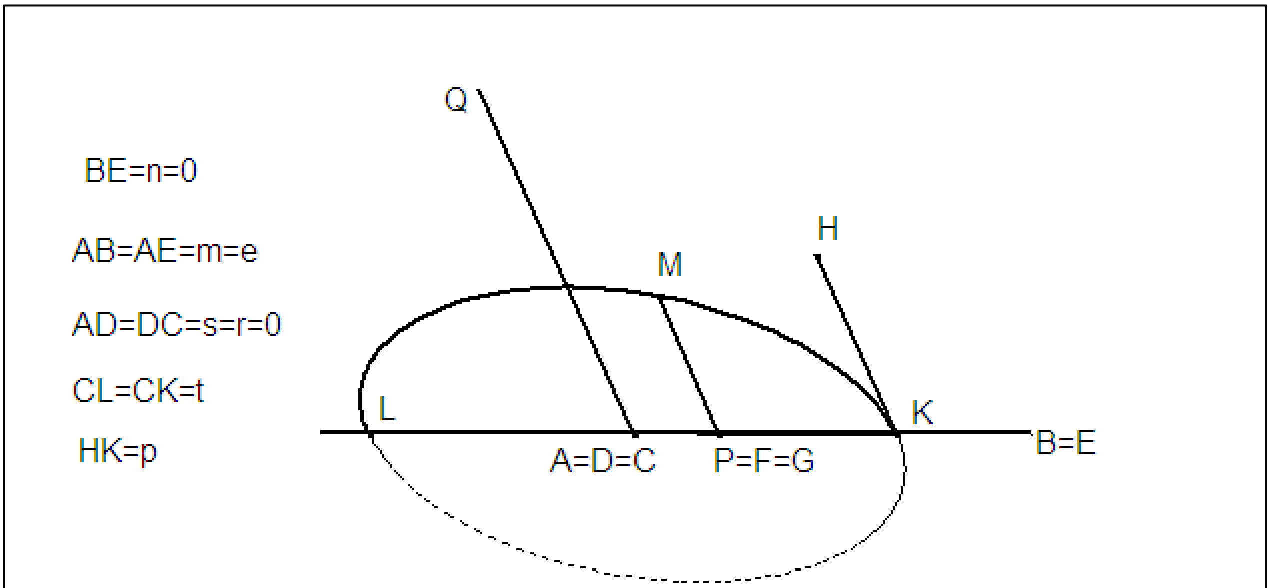

Fig.10

Studiando varie equazioni particolari del tipo **(9)** (e considerando anche valori negativi per i segmenti ***m, n, e, t, p, r, s***) De l'Hospital osserva poi che in alcuni casi può anche non esistere alcuna curva corrispondente all'equazione considerata.

Passiamo ora al terzo ***Lemma fondamentale***, che riguarda l'iperbole.

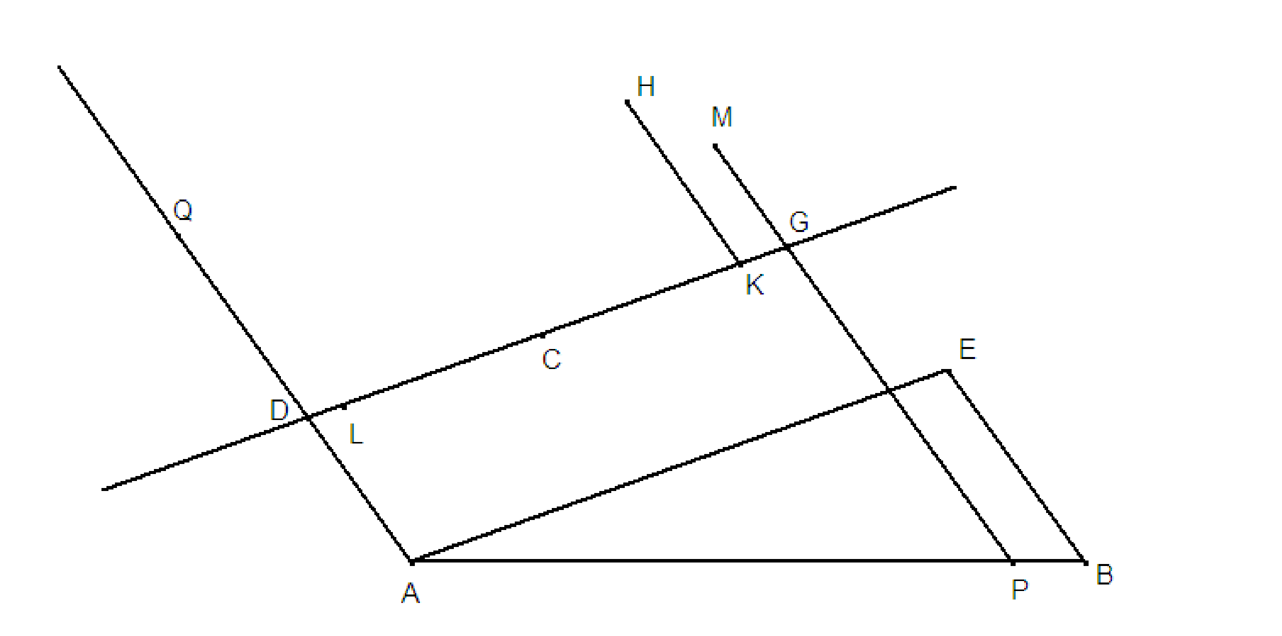

Fig. 11

Si giunge, con i medesimi dati di partenza e con lo stesso procedimento seguito nel lemma precedente (ellisse), alla situazione descritta in Fig. 11. Si descriverà quindi, con diametro LK = ***2t*** (supponiamo per semplicità che LK sia un diametro che incontra l'iperbole) *e parametro (relativo a tale diametro) KH =* ***p*** **(cfr. Fascicolo IV)** *una iperbole (o due iperboli opposte) (vedi Fig. 12)*

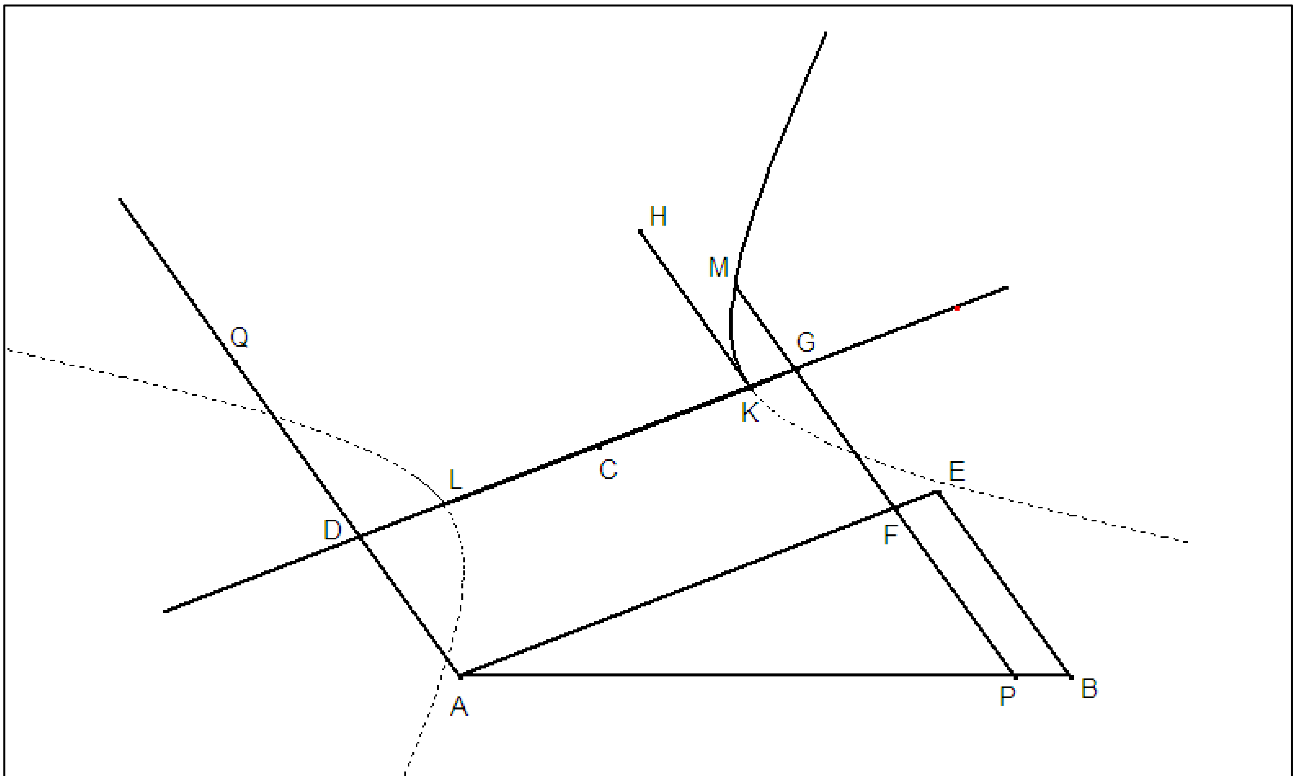

Fig. 12

Io dico che la parte OM di tale iperbole (o le parti delle due iperboli) comprese *nell'angolo PAD formato dalla retta AP con una retta AD condotta per il punto fisso A parallelamente a PM (dalla stessa parte di PM), sarà il luogo rappresentato dalla seguente equazione:*

(14) $$y^2-\frac{2n}{m}xy+\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{e^2p}{2m^2t}\right)x^2-2ry+\left(\frac{2nr}{m}+\frac{2eps}{2ms}\right)x+\left(r^2+\frac{pt^2}{2t}-\frac{ps^2}{2t}\right)=0$$

Si tracci infatti da un punto qualsiasi M della parte di iperbole considerata la linea MP, che formi con AP l'angolo inizialmente assegnato o scelto, e che incontri le parallele AE, DG nei punti F e G (vedi sempre Fig. 12).

Dai triangoli simili ABE, APF si ricava AF = DG = $\frac{ex}{m}$, *PF =* $\frac{nx}{m}$

(ricordare che AE = ***e****, AB =* ***m****, AP =* ***x****, BE =* ***n****).*

Si ha poi GM = PM – PF – FG, quindi (essendo FG = AD = ***r,*** *PM =* ***y,*** *PF =* $\frac{nx}{m}$*)*

GM = $y-\frac{nx}{m}-r$ **(15)**

Infine, KG = t – CG, CG = DG – s. Poiché DG = $\frac{ex}{m}$ *risulta allora:*

$KG=t-\frac{ex}{m}+s$. **(16)**

Il sintomo (proprietà caratteristica dell'iperbole) si scrive:

(17) $$GM^2=pKG+\frac{p}{2t}KG^2$$

Sostituendo nella **(17)** *i valori forniti da* **(15)** *e* **(16)** *si ricava la* **(14).**

Se KL = KH (cioè se il diametro 2t è uguale al parametro p) l'iperbole sarà equilatera.

Si noti che il sistema di riferimento implicitamente usato per scrivere la **(17)** è diverso da quello scelto inizialmente, rispetto al quale è scritta la **(14).** Perciò **(15)** e **(16)** si possono interpretare come formule che individuano un cambiamento di coordinate.

Nelle pagine successive, De L'Hospital fornisce numerosi esempi, e insegna anche a riconoscere l'equazione di una iperbole.

Occorre che i due quadrati y^2 e x^2 abbiano segni opposti (quindi, se è presente il termine in xy, bisogna che $\frac{e^2 p}{2m^2 t}$ sia maggiore di $\frac{n^2}{m^2}$). Possono anche avere lo stesso segno, ma a due condizioni che De L'Hospital (la parola "coefficiente" non è a quel tempo ancora usata) enuncia così:

deve esser presente il termine in xy, inoltre il quadrato di metà della frazione che lo moltiplica $\left(\frac{n^2}{m^2}\right)$ *deve esser maggiore della frazione* $\left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{e^2 p}{2m^2 t}\right)$ *che moltiplica* x^2*.*

Per noi l'enunciato sarebbe molto più semplice: il discriminante della equazione

$k^2 - \frac{2n}{m}k + \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{e^2 p}{2m^2 t}\right) = 0$ deve essere positivo.

Osserviamo ancora che, data una equazione del tipo **(14)**, ma con coefficienti diversi, applicando il principio di identità dei polinomi è possibile determinare i segmenti ***m, n, e, t, p, r, s*** e quindi ricavare la posizione della iperbole rispetto al sistema di riferimento.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, giugno 2010