Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo *N° 5*

CONICHE COME LUOGO DI PUNTI

DESCARTES: IL LIBRO I DELLA GEOMETRIA E IL PROBLEMA DI PAPPO

I. Introduzione

(Abbiamo utilizzato l'edizione UTET, 1983, della "Geometria" di Descartes. Nella stesura delle pagine seguenti ci siamo largamente serviti delle note e dei commenti di E. Lojacono).

Il libro I della "Geometria" di Descartes contiene alcune innovazioni che determinano l'importanza storica dell'opera.
Sono introdotte in geometria le operazioni dell'aritmetica (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice). Tali operazioni vengono eseguite su segmenti di retta mediante semplici costruzioni con riga e compasso, e hanno come risultato ancora segmenti (non è quindi più necessario rappresentarsi nell'immaginazione il prodotto di due o tre segmenti come una superficie o un volume).
I termini delle operazioni (e i relativi risultati) possono essere designati con lettere (una per ciascun termine o risultato). Si tratta del primo, fondamentale passo verso l'applicazione dell'algebra alla geometria. E' inoltre abbandonata la tradizionale scrittura "cossica": le notazioni che la sostituiscono sono sostanzialmente quelle ancora oggi usate.
Viene poi spiegato come pervenire dai termini di un problema ad una equazione, partendo dalla quale si può infine ottenere la costruzione che risolve il problema stesso (con riga e compasso se si tratta di un problema "piano": che cioè dia origine a una equazione di secondo grado).
Si tratta di innovazioni che implicano una profonda ristrutturazione dello spazio culturale ereditato dal '500. Richiedono infatti (fra l'altro) una netta opposizione alla tesi della incomunicabilità dei generi (sostenuta da Aristotele nell'Organon) e il superamento del principio di omogeneità.

Inoltre, come meglio vedremo in seguito, l'uso delle equazioni induce a liberarsi dalla figura (a sostituire l'equazione alla figura), mentre i geometri precedenti erano maggiormente legati all'immaginazione, a contenuti intuitivi immediati. Non fu quindi facile, per i contemporanei di Descartes, leggere e comprendere la sua opera. Altrettanto profonda è tuttavia la distanza che separa il linguaggio cartesiano dal nostro. Ci limitiamo per ora ad osservare che nelle nostre equazioni i coefficienti e le variabili indicano sempre numeri, non segmenti.

II. Letture e commento

Scriveremo d'ora in poi in carattere corsivo i brani estratti dall'opera di Descartes.
Il Libro Primo della "Geometria" è intitolato:

"*Problemi che si possono costruire usando soltanto cerchi e linee rette*"

Osserviamo che *costruire* significa qui risolvere; inoltre, il termine *linea retta* indica in Descartes (e in tutti i matematici del XVII secolo) ciò che noi chiamiamo segmento di retta. Descartes parte dunque dai problemi risolubili con riga e compasso (quelli più semplici, denotati anche come problemi *piani*), e così inizia a spiegare il suo metodo:

"*Tutti i problemi di geometria possono facilmente esser riportati a termini tali che poi, per costruirli, non c'è da conoscere che la lunghezza di alcune linee rette. E come tutta l'aritmetica è costituita soltanto da quattro o cinque operazioni, cioè l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice (che può essere considerata una specie di divisione), così in geometria, a proposito delle linee che cerchiamo, per approntarle in modo che possano divenir note, non c'è altro da fare che aggiungere o togliere loro altre linee; oppure, data una linea che, per rapportarla nel miglior modo possibile ai numeri, chiamerò l'unità (in genere, può esser presa a piacere), ed essendo poi date ancora altre due linee trovarne una quarta che stia a una di queste due come l'altra all'unità (ciò equivale alla moltiplicazione); oppure trovarne una quarta che stia ad una di queste due come l'unità sta all'altra (ciò equivale alla divisione); o infine trovare una media proporzionale tra l'unità e qualche altra linea (ciò equivale all'astrazione di radice quadrata). E, per esser più comprensibile, non esiterò ad introdurre questi termini dell'aritmetica in geometria*".

Le operazioni aritmetiche diventano così, in Geometria, costruzioni di segmenti. Descartes prende anzitutto in considerazione i casi più semplici (una teoria più completa sarà esposta nel Libro III), e fornisce i seguenti esempi:

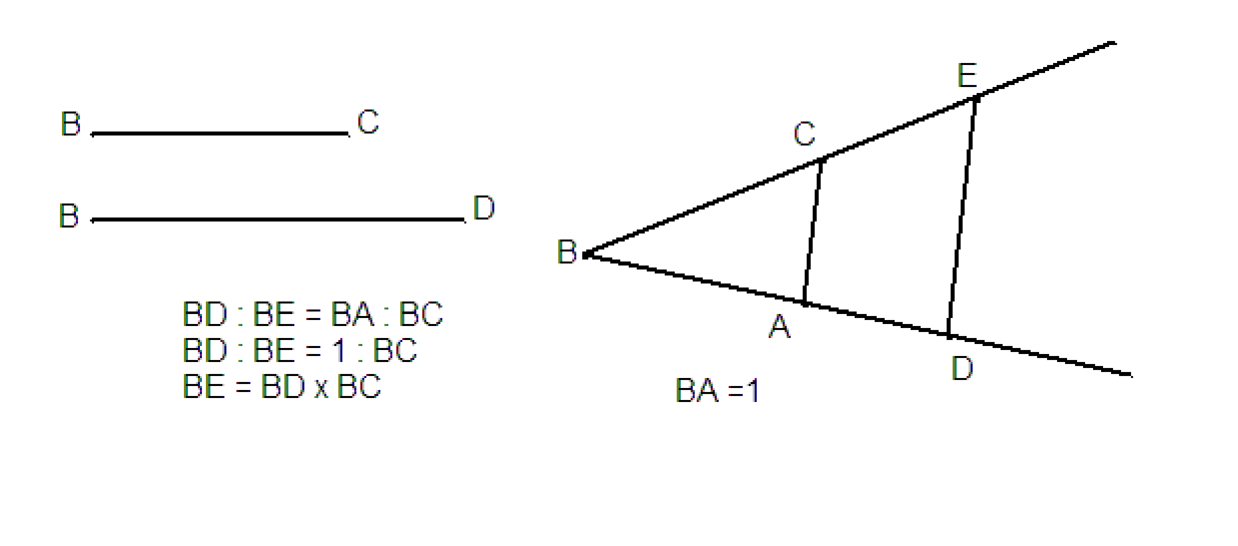

Fig. 1

Moltiplicazione: Si debbano moltiplicare fra loro i segmenti BD e BC (riportati su due semirette, con origine comune in B, come in Fig. 1). Sulla semiretta che contiene BD si collochi un punto A in modo che BA sia il segmento unità (BA = 1). Si congiungano i punti A e C e si tracci la retta DE parallela ad AC. Si avrà allora BE = BD × BC.

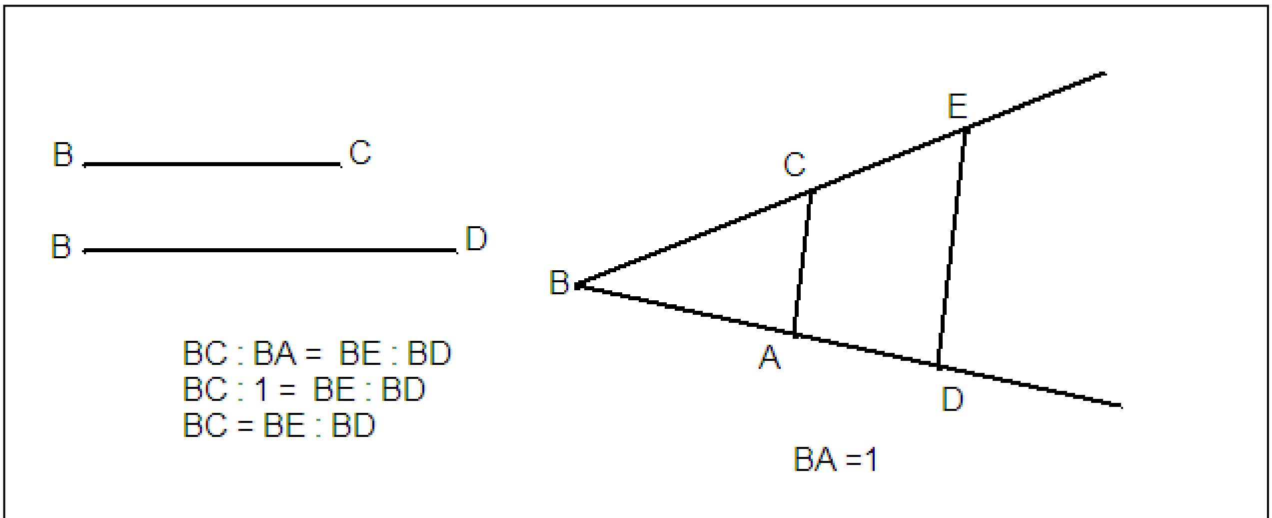

Fig. 2

Divisione: Si debbano dividere i segmenti BE e BD (riportati su due semirette, con origine comune in B, come in Fig. 2). Sulla semiretta che contiene BD si collochi un punto A in modo che BA sia il segmento unità (BA = 1). Si congiungano i punti D ed E; si tracci la retta AC parallela a DE. Si avrà allora BC = BE / BD.

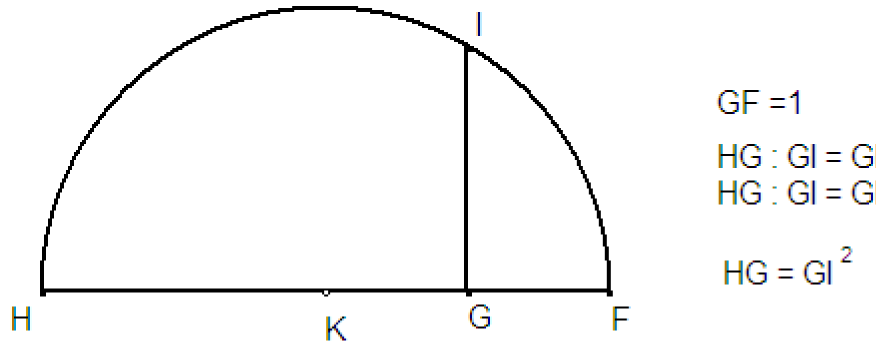

Fig. 3

Estrazione di radice quadrata: Dovendo estrarre la radice quadrata del segmento HG, aggiungo ad esso, lungo la stessa retta, un segmento GF uguale all'unità (GF = 1); considero poi il punto medio K di FH, e con centro in K traccio la circonferenza di diametro FH (Fig. 3). Dal punto G innalzo una retta perpendicolare a FH fino ad incontrare la circonferenza in I. Ottengo così GI, radice quadrata di HG. E' importante osservare che mentre in aritmetica le sole radici esprimibili sono quelle che si estraggono da quadrati perfetti, in geometria è invece sempre possibile trovare un segmento che rappresenti esattamente la radice quadrata di un segmento assegnato.

"Spesso – prosegue Descartes – *non è però necessario tracciare in tal modo queste linee sulla carta, ma basta designarle con lettere, una per ciascuna di esse. Così, per aggiungere la linea BD a GH, chiamo l'una* ***a*** *e l'altra* ***b,*** *e scrivo* ***a+b****; e* ***a – b*** *per sottrarre* ***b*** *da* ***a***, ***ab*** *per moltiplicare l'una con l'altra, e* ***a/b*** *per dividere* ***a*** *per* ***b****; e* ***aa*** *oppure a^2 per moltiplicare* ***a*** *per se stessa; e a^3 per moltiplicarla ancora una volta per* ***a*** *e così all'infinito; e $\sqrt{a^2+b^2}$ per estrarre la radice quadrata da a^2+b^2, ecc. A questo proposito debbo notare che con a^2 o b^2 o espressioni simili intendo in genere soltanto linee assolutamente semplici, anche se le chiamo, per servirmi dei termini dell'algebra, quadrati, cubi, ecc."*

In questo passo Descartes stabilisce una nuova simbologia e un esplicito rapporto dell'algebra alla geometria, prendendo nettamente le distanze da Aristotele e da tutti i matematici del '500 o a lui contemporanei. Non è necessario eseguire subito i calcoli coi segmenti (tracciando sulla carta il risultato): tali calcoli si possono anche lasciare indicati, usando scritture simboliche (ricavate dall'algebra), e ottenendo espressioni più o meno complicate che comunque rappresentano sempre segmenti

(*linee assolutamente semplici).* E' opportuno ricordare che Descartes non parla mai di polinomi o di coefficienti (termini introdotti più tardi) e usa "dimensione" al posto di "grado".
Queste scelte (introduzione dell'algoritmo algebrico e sua interpretazione geometrica) implicano evidentemente che si abbandoni la legge dell'omogeneità, secondo cui non possono paragonarsi fra loro che grandezze geometriche di uguali dimensioni.
Descartes osserva tuttavia che quando le espressioni ottenute mediante il calcolo con i segmenti sono costituite da parti che non hanno lo stesso numero di dimensioni (noi diremmo: lo stesso grado) a causa del fatto che è stato determinato (e indicato con 1) un segmento unitario, la difficoltà può essere aggirata.
Facciamo un esempio: siano dati i segmenti ***1 + a*** e ***1 + b***. Moltiplicandoli si ottiene: ***1 + a + b +ab.*** Se i termini di dimensione inferiore si considerano moltiplicati per l'unità, diventano tutti del medesimo grado.

Ora Descartes può esporre il metodo con cui affronta la soluzione (*costruzione*) di un problema assegnato.

"*…Si deve fin dal principio considerare il problema come già risolto, e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruirlo, sia a quelle che non sono note, che alle altre. Poi, senza far nessuna differenza tra quelle note e le incognite, bisogna svolgere il problema seguendo quell'ordine che più naturalmente di ogni altro mostra in qual modo le rette dipendano mutuamente le une dalle altre, fino a che non si sia riusciti a trovare il procedimento per esprimere una stessa quantità in due modi, cioè non si sia pervenuti a ciò che si chiama equazione. I termini infatti di una di queste due espressioni (presi nel loro insieme) sono uguali a quelli dell'altra (presi nel loro insieme). Bisogna poi trovare tante di siffatte equazioni quante sono le linee che sono state supposte come incognite. Se invece non se ne trovano altrettante, pur non avendo omesso nulla di ciò che è richiesto dal problema, è evidente che esso non è interamente determinato. In tal caso si possono prendere a piacere linee note per tutte le incognite cui non corrisponde equazione alcuna……*"

Si ottiene così quello che noi chiamiamo un sistema di *n* equazioni in *n* incognite: la soluzione del problema geometrico è quindi ricondotta alla soluzione di un problema algebrico. Manipolando le equazioni del sistema si otterranno alla fine n equazioni (di grado qualsiasi) in una sola incognita (essendo l'incognita di ogni equazione diversa dalle altre).
Il procedimento consigliato da Descartes riprende il metodo che gli antichi geometri greci indicavano come *analisi*: e tuttavia è profondamente originale, perché mentre gli antichi non si staccavano mai dalle figure (non si liberavano mai dai termini della

immaginazione), egli perviene ad una equazione: che non è una figura, ma una condizione perché la figura sussista.
A questo punto, Descartes prende in considerazione i *problemi piani*, cioè quelli che conducono a equazioni geometricamente risolubili con il solo uso della riga e del compasso. Perché ciò accada, devono condurre a equazioni di secondo grado.
Descartes esamina i casi:

(1) $z^2 = az + b^2$; (2) $y^2 = -ay + b^2$; (3) $z^2 = az - b^2$

e fornisce (scartando le radici negative che egli considera – come tutti i matematici del suo tempo – geometricamente prive di significato) le seguenti soluzioni:

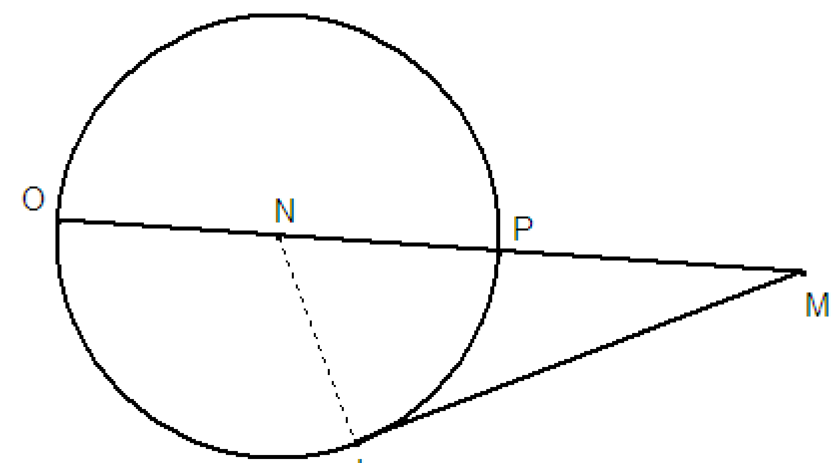

Fig. 4

Caso (1). Si consideri una circonferenza di centro *N* e diametro ***a***. Da un punto L della circonferenza si tracci (Fig. 4) una tangente alla circonferenza stessa, e sia *M* un punto della tangente tale che *LM* = ***b***. Si tracci inoltre la retta *MN*, che incontra la circonferenza nei punti *P* ed *O*.
Per un noto teorema, risulta $OM \times PM = LM^2$. Posto *OM* = ***z***, e ricordando che (per ipotesi) OP = ***a***, si ha allora : $z(z-a) = b^2$, cioè: $z^2 = az + b^2$**.**
Quindi la situazione geometrica rappresentata in Fig. 4 è caratterizzata dalla equazione **(1).** Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *NLM*, poiché $NM = z - \frac{1}{2}a$ e *LM* = *b* si ottiene infine $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ **,** radice (positiva) dell'equazione **(1).**

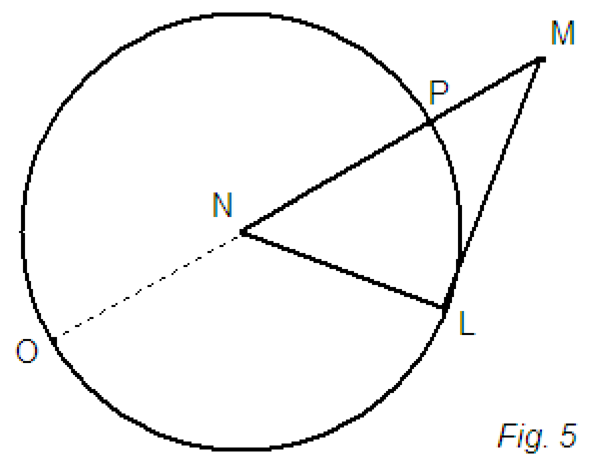

Fig. 5

Caso (2). Si costruisce come nel caso precedente, sulla circonferenza di centro *N* e diametro ***a***, il triangolo rettangolo *NML*, dove *LM* (tangente alla circonferenza in L) = ***b*** (cfr. Fig. 5). Ponendo *MP* = ***y***, abbiamo (per il teorema già utilizzato sulla secante e la tangente uscenti da *M)*:
$y(y+a)=b^2$. Il teorema di Pitagora (applicato ancora al triangolo *NML*) fornisce ora $y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$**,** radice (positiva) della equazione **(2).**

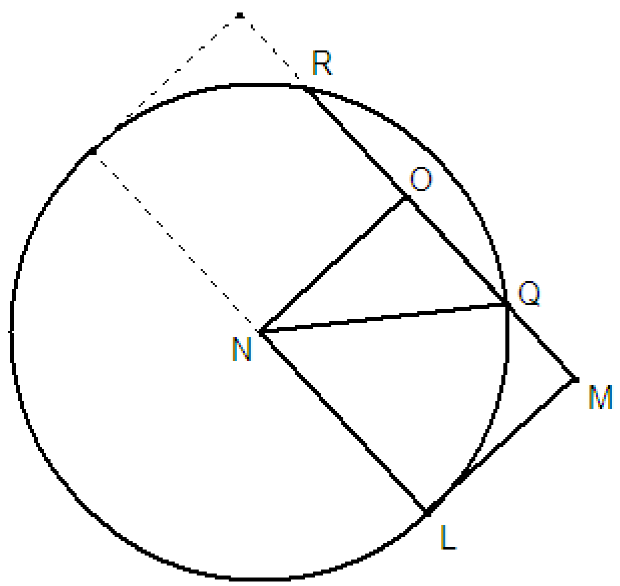

Fig. 6

Caso (3). Data una circonferenza di centro *N* e di diametro ***a***, si prenda su di essa un punto *L*, e si tracci *LM* tangente in *L* alla circonferenza, scegliendo *M* in modo che sia

LM = ***b***. Si innalzi poi da *M* una parallela a *LN*: supponiamo che essa intersechi la circonferenza in due punti, *R* e *Q* (cfr. Fig. 6). Si ponga *MR* = ***z***: si dimostra facilmente che *MQ* = ***a – z***. Per il teorema sulla secante e la tangente già utilizzato nei casi precedenti, abbiamo allora $z(z-a) = b^2$, cioè $z^2 = az - b^2$. (Ponendo *MQ* = ***z*** avremmo ottenuto la medesima equazione, poiché in questo caso sarebbe MR = ***a – z***).
Chiamiamo *O* il punto medio del segmento *QR*. Dal triangolo rettangolo *ONQ* (cfr. Fig. 6) abbiamo $OQ = \sqrt{QN^2 - ON^2}$. Se dunque *MR* = ***z***, e conseguentemente *MQ* = ***a – z***, ricaviamo $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$; se invece *MQ* = ***z***, e conseguentemente *MR* = ***a – z***, risulta $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.
In questo caso Descartes considera tutte le soluzioni possibili dato che ambedue risultano positive.
Se la parallela innalzata da M fosse tangente alla circonferenza (sarebbe allora $\frac{1}{2}a = b$) le due radici coinciderebbero (ma Descartes non prende in considerazione questo caso). Invece accenna al caso delle radici immaginarie:

"Se il cerchio che, avendo il centro in N,passa per il punto L, non taglia né tocca la linea retta MQR, l'equazione allora non ammette nessuna radice, e così si può dar per certo che la costruzione del problema proposto è impossibile".

A questo punto Descartes può mostrare la potenza del suo metodo risolvendo un problema che gli antichi avevano enunciato, ma al quale non erano riusciti a dare soluzione completa. Si tratta del problema esposto da Pappo nell'opera "La Collezione matematica" (noto perciò come problema di Pappo) al quale è dedicata l'ultima parte del Libro I della "Geometria".
Descartes ne riporta l'enunciato originale, tradotto in lingua latina da Commandino: diamo qui la versione italiana, illustrandola con qualche figura, e limitandoci al caso di tre o quattro rette soltanto:

"Se tre linee rette (complanari) sono date per posizione e si conducono da uno stesso punto su di esse – secondo angoli assegnati – linee rette, e se è pure dato il rapporto sussistente tra il rettangolo compreso tra due rette tracciate e il quadrato dell'altra, il punto giacerà su un luogo solido dato per posizione, cioè su una delle tre sezioni coniche.
Se poi le linee sono condotte ad angoli dati su quattro linee rette date per posizione e se è dato anche il rapporto tra il rettangolo compreso tra due delle linee condotte e

quello compreso tra le altre, il punto si troverà ugualmente su una sezione conica data per posizione”.

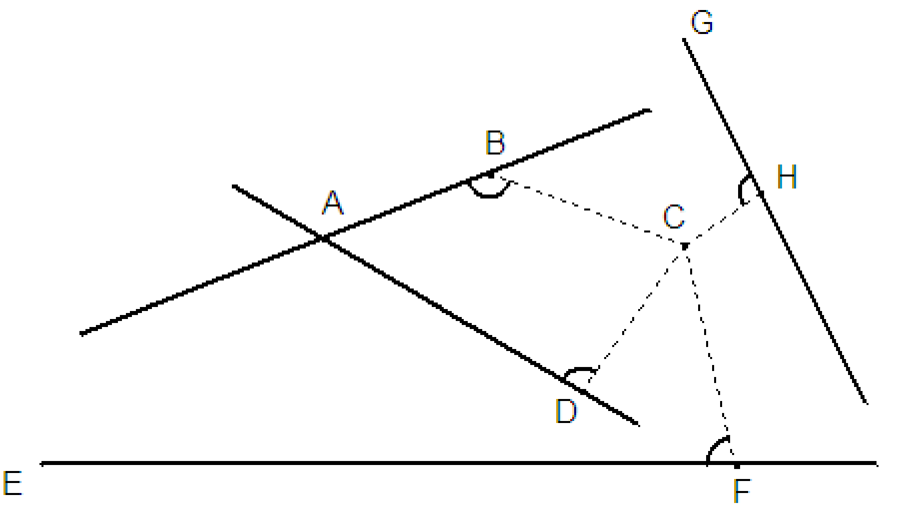

Fig. 7

Le rette (***AB***,***AD***, ***EF***, ***GH***) – qui considerate nel numero massimo di quattro, ma potrebbero essere in numero qualsiasi – sono rappresentate in Fig.7. *C* è un punto, scelto nel piano che contiene tali rette. Da *C* si tracciano (sul medesimo piano) altre *rette* (noi diremmo: *segmenti*) in modo che gli angoli *CBA, CDA, CFE, CHG* – inizialmente assegnati – abbiano sempre lo stesso valore qualunque sia *C*. Inoltre, il rettangolo avente dimensioni (per esempio) *CB* e *CD* abbia un rapporto determinato col quadrato di lato *CF* oppure col rettangolo avente dimensioni *CF* e *CH* (il rapporto potrà in particolare essere uguale ad 1). *C* giacerà allora (in entrambi i casi) su una sezione conica.

Ecco la soluzione di Descartes, da lui fornita seguendo il metodo illustrato nelle pagine precedenti.

“Suppongo il problema come già risolto, e per liberarmi dalla confusione di tutte queste linee, considero una delle rette date e una di quelle che bisogna trovare (per esempio AB e CB) come le principali, e a queste cerco di riferire tutte le altre. La parte della linea AB che sta fra i punti A e B sia chiamata ***x***; *BC sia chiamata* ***y***. *Tutte le altre linee siano poi prolungate fino a che intersechino queste due, pure prolungate se è necessario e se non sono parallele a quelle”*

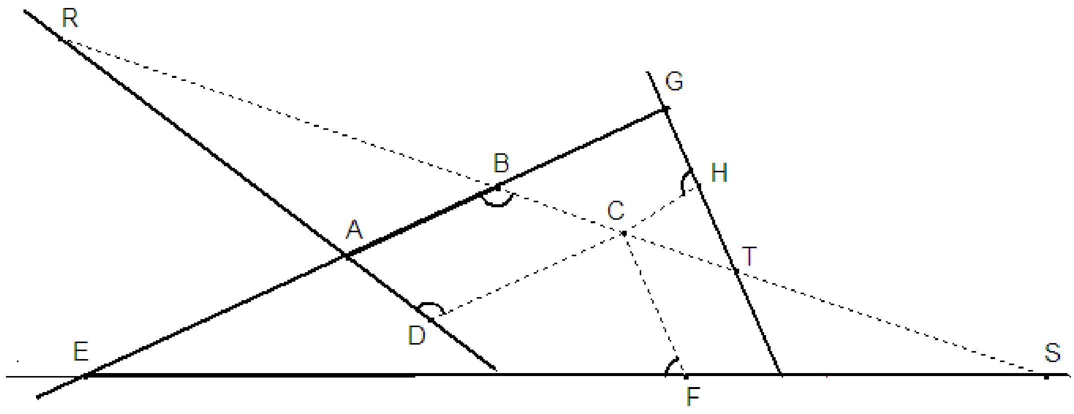

Fig. 8

Si esamini la Fig. 8, ottenuta dalla Fig. 7 eseguendo i prolungamenti richiesti. La retta *AB* è intersecata dalle altre nei punti *E, A, G*; la retta *BC* nei punti *R, S, B, T*. I segmenti (*le linee*) da determinare sono (a parte *BC* che è uguale a ***y***) *CD, CF, CH*. Vedremo che allo scopo di ottenere una espressione per *CD* Descartes (che basa il suo procedimento sulla considerazione di triangoli simili) deve prima ottenerne una per *CR*; allo scopo di ottenere una espressione per *CF* se ne deve procurare prima altre due, una per *CS*, l'altra per *BS*; e che può scrivere quella per *CH* solo dopo aver ricavato quelle relative a *CT* e *BT*.

*"Tutti gli angoli del triangolo ARB sono dati; il rapporto tra i lati AB e BR è pure dato: lo pongo come tra **z** e **b**; così, AB essendo **x**, RB sarà* $\frac{bx}{z}$ *, e tutta la linea CR – poiché B cade tra C ed R – sarà* $\frac{bx}{z}+y$ *(mentre se C cadesse tra B ed R sarebbe* $\frac{bx}{z}-y$ *, e se R cadesse tra C e B si avrebbe CR =* $y-\frac{bx}{z}$*).*

*Similmente, i tre angoli del triangolo DRC sono dati, conseguentemente è dato anche il rapporto tra i lati CR e CD che pongo come tra **z** e **c**; in tal modo, CR essendo* $\frac{bx}{z}+y$ *, sarà*

(4) $CD=\frac{bcx}{zz}+\frac{cy}{z}$ *(ma sarebbe ecc.)* (Cfr. Fig. 8).

*Dopo ciò, giacché le rette AB, AD ed EF sono date per posizione, la distanza tra i punti A ed E è pure data. Detta **k** tale distanza, si avrà EB = **k + x** (ma sarebbe **k – x** se il punto B cadesse tra E ed A, e **x – k** se E cadesse tra A e B).*
*E giacché gli angoli del triangolo ESB sono tutti dati, il rapporto tra BE e BS è pure dato, e lo pongo come tra **z** e **d**, cosicché BS è* $\frac{dk + dx}{z}$ ***,** e tutta la linea CS è* $\frac{dk + dx - zy}{z}$***,** ma sarebbe (cfr. sempre Fig. 2)* $\frac{dk + dx + zy}{z}$ *se B cadesse tra C ed S, e sarebbe* $\frac{zy - dk - dx}{z}$ *se il punto S cadesse tra B e C.*
*Inoltre, i tre angoli del triangolo FSC sono dati, e perciò è pure dato il rapporto tra CS e CF, che sia come tra **z** ed **e**: si avrà dunque*

(5) $CF = \frac{dek + dex - ezy}{zz}$ (Cfr. Fig. 8).

*Nello stesso modo, AG, che chiamo **l**, è data, e BG è **l – x**; e, a causa del triangolo BGT, il rapporto di BG a BT è pure dato, e sia come tra **z** ed **f**: BT sarà allora* $\frac{fl - fx}{z}$ ***,***
e CT = $\frac{zy + fl - fx}{z}$ *(se B è tra C e T).*
*Poi, di nuovo, essendo dato, a causa del triangolo TCH, il rapporto tra CT e CH, rapporto che poniamo come tra **z** e **g**, avremo*

(6) $CH = \frac{fgl - fgx + gzy}{zz}$ (Cfr. Fig. 8)

*E così vedete che qualunque sia il numero delle linee date per posizione, tutte quelle tracciate dal punto C secondo angoli dati, e conformemente al contenuto del problema, possono sempre venire espresse una per una da tre termini, di cui uno è la quantità incognita **y**, moltiplicata, o divisa, da qualche altra nota, un altro la quantità incognita **x** pure moltiplicata o divisa da qualche altra nota, il terzo, infine, una quantità interamente nota. Deve esser fatta eccezione soltanto per il caso in cui le rette sono tutte parallele o alla retta AB (e allora il termine contenente la **x** sarà zero) o alla retta CB (e allora il termine contenente la **y** sarà zero): d'altra parte ciò è tanto chiaro che è inutile che mi soffermi in ulteriori spiegazioni.*

Spiegazioni che invece sarebbero necessarie: perché nella tradizione euclidea lo zero non poteva essere assunto come quantità.

*I segni **+** e **–,** che si congiungono a questi termini, possono poi essere mutati in tutti i modi immaginabili.*

Se questa affermazione si riferisce al caso particolare assunto da Descartes come esempio, non è vera. Altrimenti, dovrebbe essere meglio chiarita. Non è il caso di approfondire qui il problema. Volendo, si può leggere J. Dhombres, "Calcoli e forme di invenzione nella matematica francese del Seicento" in "La Matematica: i luoghi e i tempi", a cura di Bartocci e Odifreddi, Einaudi 2007

*Potete ancora notare che nel prodotto di alcune di queste linee l'una per l'altra, ciascuna delle quantità **x** e **y** può avere solo tante dimensioni quante sono le linee che serve a spiegare e che sono state moltiplicate come si è detto. In tal modo queste quantità non avranno mai più di due dimensioni nei prodotti risultanti dalla moltiplicazione di due rette soltanto, né più di tre in quelli risultanti dalla moltiplicazione di tre rette.*
*Inoltre, poiché per determinare il punto C è richiesta una sola condizione, e cioè che il prodotto di un certo numero di queste linee sia uguale al prodotto delle rimanenti rette, oppure (e ciò non è in nulla più difficile) stia con quest'ultimo in un rapporto dato, si può assegnare un valore a piacere ad una delle incognite **x** o **y**, e cercare l'altra mediante questa Equazione, nella quale è evidente che quando il problema è proposto per non più di cinque linee (non tutte parallele), la quantità **x**, che non serve in nessun modo ad esprimere la prima linea, non può mai avere più di due dimensioni. In tal modo, assegnando un valore noto ad **y**, non rimarrà che* ***xx** = $\pm$ **ax** $\pm$ **bb***, *e si potrà così trovare la quantità **x con la riga e il compasso**, nel modo precedentemente spiegato).*
*Prendendo successivamente infinite grandezze diverse per la linea **y**, ne troveremo pure infinite per la linea **x**, e così si avrà un'infinità di punti diversi come il punto C, per mezzo dei quali si descriverà la linea curva richiesta"*

Utilizzando il nostro linguaggio, ecco come possiamo riassumere il procedimento suggerito da Descartes.
Assunte come linee di riferimento due di quelle che compaiono nell'enunciato del problema (una per ogni tipo: cioè la prima fra quelle assegnate, la seconda fra quelle uscenti dal punto C appartenente al luogo cercato) si dimostra facilmente che i prodotti di cui è noto il rapporto sono costituiti da fattori di primo grado in x e in y. Pertanto, tali prodotti saranno espressi da polinomi nei quali gli addendi contenenti x o y non potranno avere grado superiore al numero dei fattori da cui i prodotti stessi sono formati. Se i termini in x sono tutti di secondo grado, assegnando valori noti ad y si otterranno (scrivendo che due di quei prodotti sono uguali oppure che hanno uguale rapporto) equazioni di secondo grado in x risolubili col procedimento

grafico spiegato da Descartes (come abbiamo visto) nella prima parte del Libro I del suo trattato: in tal modo il luogo potrà essere tracciato punto per punto.
Esplicitiamo i calcoli che si dovrebbero eseguire, servendoci delle espressioni ricavate da Descartes. Supponiamo che il luogo di *C* sia definito dalla relazione: *CB×CD = CF×CH*.
Poiché *CB* = y, (ricordare l'avvertimento di Descartes: *la quantità x non serve ad esprimere la prima linea*) dalle espressioni (4), (5), (6) si ottiene:

$$(7) \quad y \times \left(\frac{bcx}{z^2} + \frac{cy}{z} \right) = \left(\frac{dek + dex - ezy}{z^2} \right) \times \left(\frac{gzy + fgl - fgx}{z^2} \right)$$

che noi leggiamo come polinomio di secondo grado nelle variabili x e y. (in Fig. 8 x = *AB*, y = *RB*). Descartes non esegue ora il calcolo indicato nella (7): lo rinvia al Libro II (dove dimostra che equazioni di questo tipo rappresentano coniche), giacché qui il suo scopo è soltanto quello di fornire un ***metodo per la soluzione*** del problema: metodo profondamente originale proprio perché conduce ad equazioni, non a figure. Queste si potranno disegnare in seguito, verificando che si tratta effettivamente (come anche Pappo asseriva) di coniche (definite però nel piano come luoghi geometrici, senza fare ricorso ai "sintomi" classici).
Il metodo risolutivo proposto da Descartes per il problema di Pappo è assolutamente generale, valido qualunque sia il numero delle rette inizialmente assegnate (qualunque sia, quindi, la curva soluzione): il rapporto tra curve ed equazioni apre così un fondamentale, amplissimo terreno di ricerca, a cui appunto la "Geometria" cartesiana è dedicata.
Ultima osservazione: il riferimento utilizzato da Descartes per scrivere l'equazione **(7)** è formato da due rette scelte fra quelle assegnate come dati del problema. La curva costruita è allora in posizione predeterminata rispetto a tale riferimento. Una completa libertà nella collocazione della curva rispetto al riferimento si trova solo qualche decennio dopo (ad esempio in De L'Hospital), come vedremo nel fascicolo successivo.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, giugno 2010