Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo *N°4*

L' ELLISSE NEL TRATTATO DI APOLLONIO DA PERGA

DEDUZIONE DEL SINTOMO

I.

Richiamiamo anzitutto alcune definizioni e proprietà esposte da Apollonio nelle prime pagine del ***Libro I*** delle ***Coniche***.

*Si consiglia di accompagnare la lettura con un accurato esame del **modello fisico** oppure con la esplorazione del file "**Apollonio: ellisse**".*

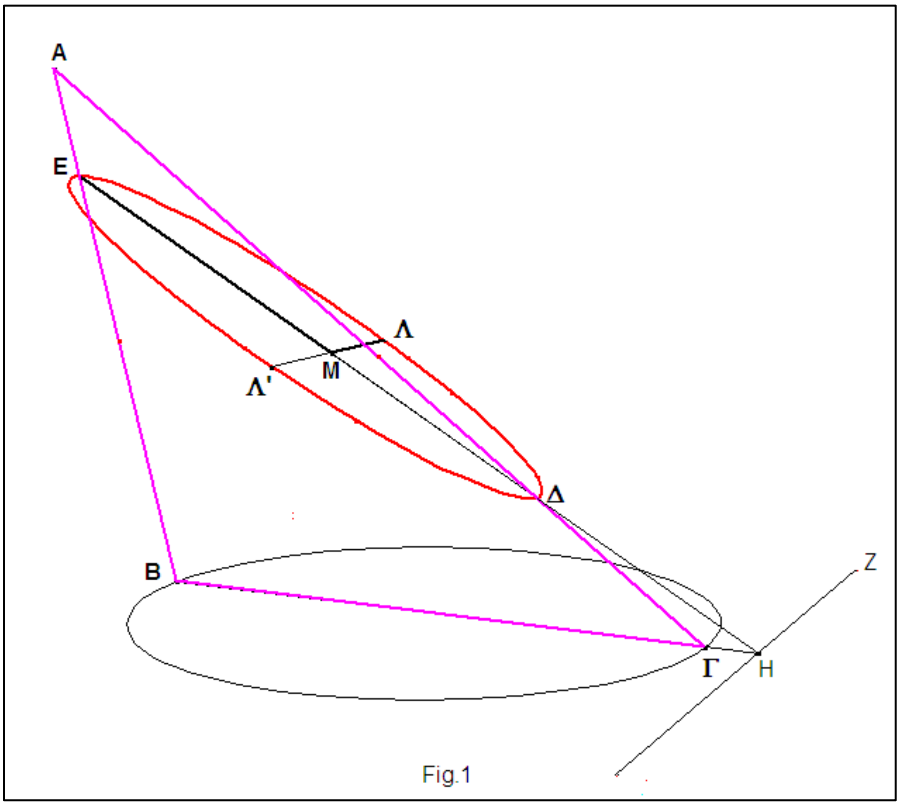


Fig.1

Dati un cerchio BΓ e un punto A esterno al piano del cerchio (cfr. ***Fig. 1***), una retta per A che si muova lungo la circonferenza del cerchio genera un cono (doppio). Il cerchio viene detto base del cono. Asse del cono è la retta che unisce A al centro del cerchio (non rappresentata in figura). Se questa retta è perpendicolare alla base, il cono viene detto circolare retto; in caso contrario, scaleno o obliquo. Una sezione del cono mediante un piano tagli il piano della base in una retta ZH. Se si considera il diametro BΓ del cerchio base perpendicolare a ZH, allora ABΓ è un triangolo (***triangolo assiale***) nel cui interno giace l'asse del cono. Sia EΔ la retta determinata dall'incontro tra il piano della sezione conica e quello del triangolo assiale (in ***Fig. 1*** il piano della conica è stato scelto in modo che i punti E, Δ siano entrambi al di sotto del vertice A). EΔ non è necessariamente un asse della sezione conica, e non è necessariamente perpendicolare a ZH se il cono è scaleno. (Si ha perpendicolarità tra ZH e ΔE solo se il cono è retto oppure quando il piano di ABΓ è perpendicolare alla base di un cono scaleno). Sia poi ΛΛ' una qualsiasi corda della conica parallela a ZH (e quindi non necessariamente perpendicolare a EΔ). Apollonio prova allora che ΛΛ' è bisecata da EΔ in M, sicché ΛM è la metà di ΛΛ'. (EΔ è in ogni caso un ***diametro*** della sezione). Inoltre, Apollonio dimostra (prop. XVII del Libro I) che la retta tangente alla sezione conica in E è parallela alle corde ΛΛ' (le quali si dicono ***ordinatamente condotte*** rispetto al diametro EΔ).

Traduciamo ora, dal trattato sulle coniche di Apollonio, la ***proposizione XIII*** (libro I, ed. Heiberg, pag. 49).

Prop. XIII.

Protasis (enunciazione):

Un cono sia tagliato da due piani: il primo passi per l'asse, il secondo incontri entrambi i lati del triangolo per l'asse (al di sotto del vertice), senza essere parallelo alla base del cono né in posizione contraria[1] *(dunque, la curva di intersezione col cono non sarà una circonferenza). Il piano di base del cono e il secondo piano secante si incontrino lungo una retta perpendicolare o alla base del triangolo per l'asse o al suo prolungamento: in direzione parallela a questa perpendicolare si tracci una retta che vada da un punto della curva sezione fino al diametro della sezione stessa.*

*Il quadrato di tale retta sarà equivalente al rettangolo applicato a un'altra retta (**parametro**) così definita: deve avere col diametro della sezione lo stesso rapporto esistente tra il quadrato della retta parallela al diametro congiungente il vertice del cono con un punto appartenente alla base del triangolo per l'asse, e il rettangolo formato dalle parti in cui il punto stesso la divide. Il rettangolo sarà applicato con una altezza uguale alla retta compresa tra il vertice del cono e il punto in cui il lato del quadrato incontra il diametro, e col difetto di un rettangolo simile e similmente disposto a quello avente come lati il diametro della sezione e il parametro precedentemente definito. Questa sezione si chiamerà **ellisse**.*

Ecthesis (rappresentazione). (Cfr. Fig. 2)

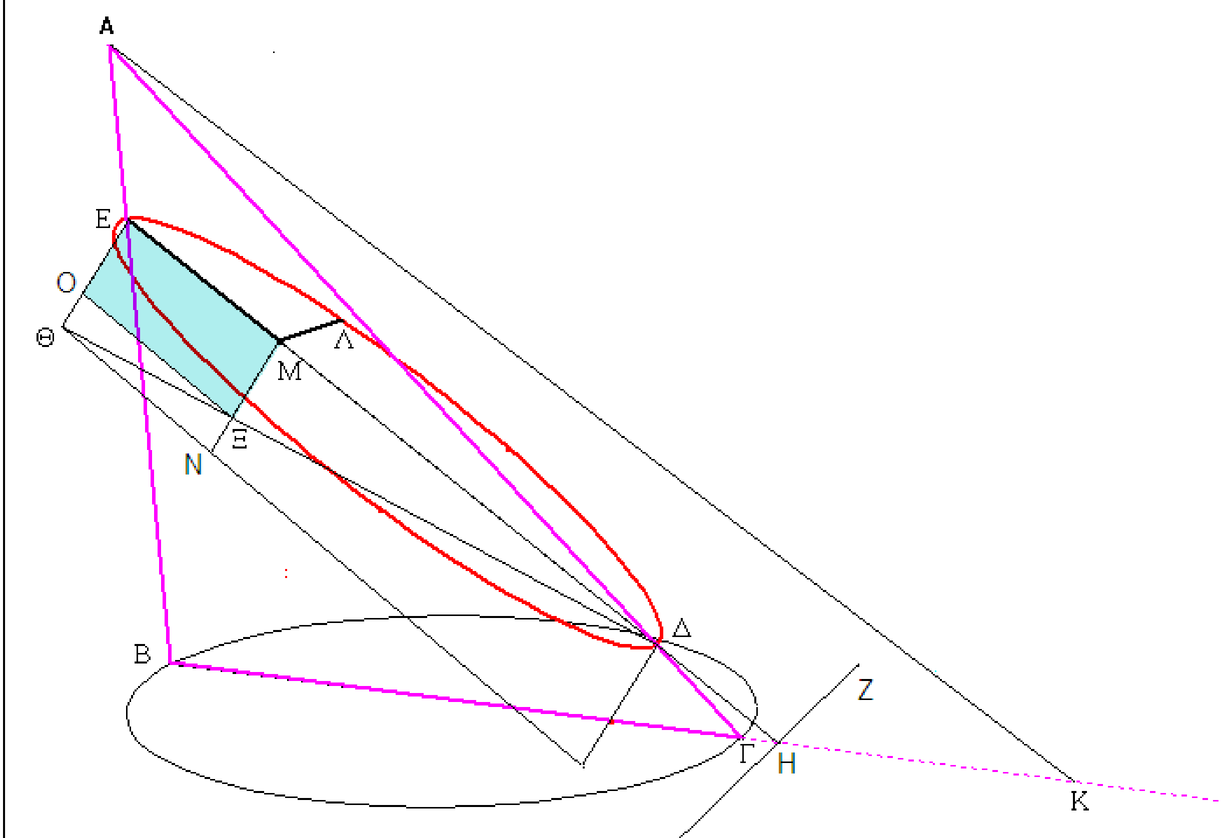


Fig. 2

Il cono, di vertice A e cerchio di base BΓ, sia intersecato da un piano passante per l'asse e generante come sezione il triangolo ABΓ. Sia inoltre intersecato da un altro piano che incontri entrambi i lati del triangolo per l'asse (al di sotto del vertice) ma non sia né parallelo alla base del cono né in posizione contraria, e produca come sezione la linea ΔE. Sia poi ZH (perpendicolare a BΓ) la retta intersezione tra il piano secante e il piano di base del cono; il diametro della sezione sia EΔ. Da E si tracci una retta EΘ perpendicolare a EΔ; da A si tracci una retta AK parallela a EΔ.

Sia ΔE : EΘ = AK^2: (BK $\times$ KΓ). (*)

Si scelga sulla curva sezione un punto qualsiasi Λ, e da Λ si tracci una retta ΛM parallela a ZH. Dopo aver congiunto i punti Δ e Θ, si mandi da M la retta MΞN parallela a ΘE, poi da Θ e Ξ le rette ΘN, ΞO parallele a EM.

Io dico che il quadrato di lato ΛM ha area uguale a quella applicata a EΘ, con altezza EM e un difetto simile al rettangolo ΔE $\times$ EΘ. Cioè: $\Lambda M^2 = (EM \times M\Xi)$ (**)

Come vedremo in seguito, EΘ è il ***lato retto*** (***parametro***) relativo al diametro EH (o al ***lato trasverso*** EΔ della ***ellisse***. La definizione *(*)* non fornisce una visualizzazione intuitiva del segmento EΘ: "difetto" che verrà eliminato in uno scritto di J. Bernoulli del 1689 (cfr. più avanti il paragrafo III; cfr. anche Fascicolo N° 3). La *(*)* però

consente di determinare $E\Theta$ con riga e compasso: infatti utilizzando le proposizioni ***41***, ***42***, ***43*** e ***44*** del ***libro I degli Elementi di Euclide*** è possibile sostituire al rapporto $AK^2:(BK \times K\Gamma)$ che compare al secondo membro della proporzione *(*)* un rapporto tra segmenti, sicché $E\Theta$ si costruirà come quarto proporzionale fra tre segmenti assegnati.
Nell'enunciato della proprietà caratteristica (sintomo) Apollonio fa esplicito riferimento alla ***applicazione ellittica delle aree***: ciò giustifica il nome di ***Ellisse*** dato alla sezione qui considerata. (Cfr. ***Euclide, libri II e VI***)

Preparazione e dimostrazione. (Cfr. Fig. 3)

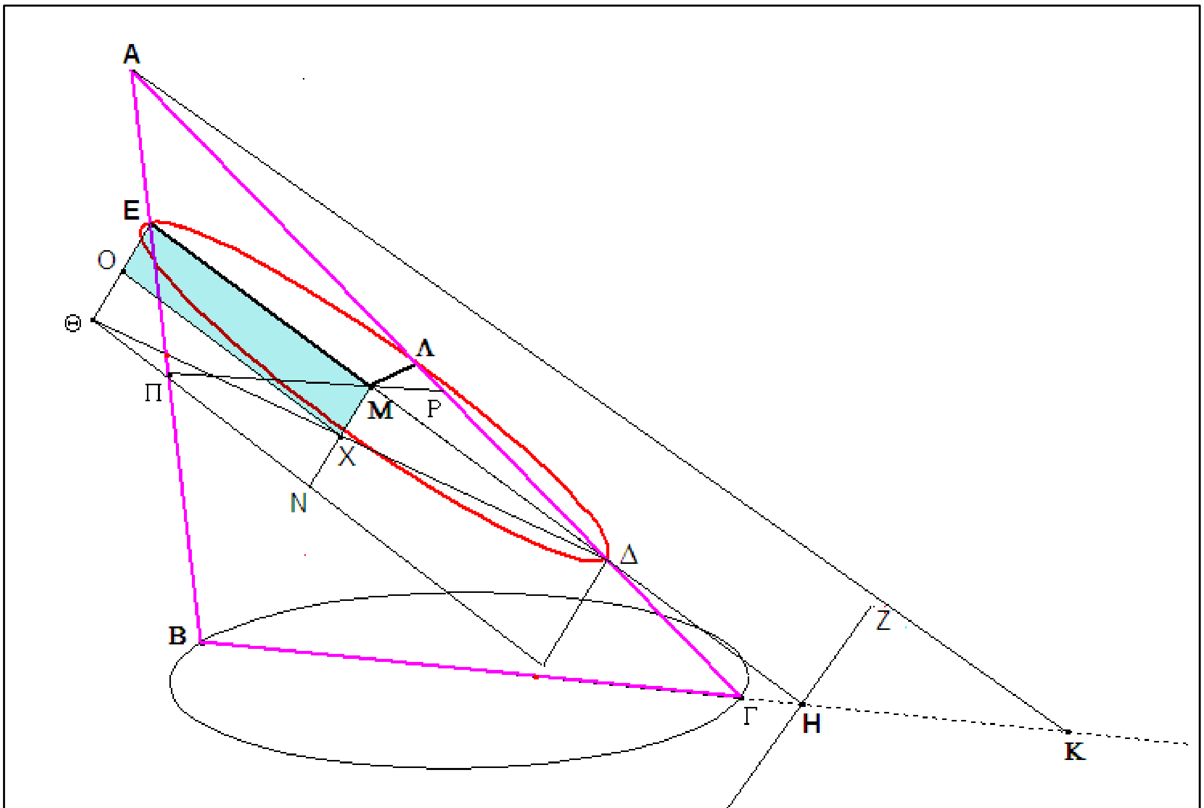


Fig. 3

Si faccia passare per M una retta $\Pi M P$ parallela a $B\Gamma$. Essendo ΠP e ΛM rispettivamente parallele a $B\Gamma$ e ZH, il piano individuato dalle rette ΠP e ΛM è parallelo a quello delle rette $B\Gamma$ e ZH, cioè alla base del cono. Pertanto l'intersezione tra il cono e il piano passante per ΠP, ΛM sarà una circonferenza avente ΠP come diametro; ma ΛM è perpendicolare a ΠP, sicché $\Lambda M^2 = (\Pi M \times MP)$ ***(1)***
Osserviamo ora che il secondo membro della (*) si può scrivere
$AK^2:(BK \times K\Gamma) = (AK:KB) \times (AK:K\Gamma)$ ***(2).***
Dai triangoli simili AKB, EHB, $EM\Pi$ si ricavano le proporzioni AK:KB = EH:HB = EM:$M\Pi$ ***(3).***
Dai triangoli simili $AK\Gamma$, $\Delta H\Gamma$, ΔMP si ricavano inoltre le proporzioni:

$AK:K\Gamma = \Delta H:H\Gamma = \Delta M:MP$ ***(4).***

*Tenendo conto delle **(2), (3), (4)** e della $(*)$ si può allora scrivere:*

$\Delta E:E\Theta = (EM:M\Pi) \times (\Delta M:MP) = (EM \times \Delta M) : (M\Pi \times MP)$ ***(5)***

Da queste ultime uguaglianze e dalla similitudine dei triangoli $\Delta E\Theta$, $\Delta M\Xi$ si ottiene poi:

$(EM \times \Delta M) : (M\Pi \times MP) = \Delta E : E\Theta = \Delta M : M\Xi$.

Moltiplicando i due termini di questo ultimo rapporto per EM si ricava $\Delta M : M\Xi$ = $(\Delta M \times EM) : (M\Xi \times EM)$

*Ricordando la **(5):***

$(\Delta M \times EM) : (M\Xi \times EM) = (EM \times \Delta M) : (M\Pi \times MP)$

Perciò:

$(M\Xi \times EM) = (M\Pi \times MP)$*, uguaglianza da cui, per la **(1),** si ha infine:*

$(M\Xi \times EM) = \Lambda M^2$ ***(6).***

Riaffermazione (conclusione)

Dunque il quadrato di lato ΛM ha area uguale a quella della superficie MO, applicata a $E\Theta$ con altezza EM e un difetto uguale alla superficie ON simile al rettangolo $\Delta E \times E\Theta$.

*La sezione soddisfacente a tale proprietà si chiama **ellisse,** $E\Theta$ si chiama **parametro** relativo alle rette **ordinatamente condotte** a ΔE.*

*$E\Theta$ si chiama anche **lato retto**, mentre ΔE è il **diametro** (o **lato trasverso**)*

II

Anche in questo caso scegliere sulla conica il punto Λ significa assegnare (sul diametro della curva) l'altezza EM del rettangolo (equivalente al quadrato di lato ΛM) da "applicare" al lato retto EΘ. Per avere la base di tale rettangolo occorre togliere a $E\Theta$ un segmento $O\Theta = \Xi N$, in modo che il difetto richiesto risulti determinato. Come abbiamo visto, Apollonio fornisce una costruzione con riga e compasso per ottenere $O\Theta = \Xi N$ partendo dalle grandezze note $E\Delta$ ed EM (cfr. ***ecthesis***): la dimostrazione successiva prova appunto che il rettangolo così costruito (altezza EM, base EΘ – OΘ) è equivalente al quadrato di lato ΛM.

La ***(6)***, essendo $M\Xi = MN - N\Xi = E\Theta - O\Theta$, si può scrivere:

$\Lambda M^2 = (E\Theta - O\Theta) \times EM \quad (\alpha)$

I triangoli simili $O\Xi\Theta$, $\Delta E\Theta$ (cfr. la costruzione illustrata in Fig. 2) forniscono (essendo $O\Xi = EM$): $O\Theta:EM = E\Theta:E\Delta$.

Pertanto:

$O\Theta = (EM \times E\Theta) : E\Delta \quad (\beta)$

Riscriviamo (α) tenendo conto di (β):

$(\boldsymbol{\gamma})\qquad \Lambda M^2 = E\Theta \times EM - \frac{E\Theta}{E\Delta} \times EM^2$

Ovviamente, i simboli e la cultura dell'algebra sono del tutto estranei allo spazio teorico della geometria alessandrina. Ma per noi è difficile resistere alla tentazione di farne uso. Se dunque poniamo: ΛM = y (ordinata di Λ), EM = x (ascissa di Λ), EΘ = 2p (parametro relativo al diametro considerato),
EΔ = a (diametro trasverso), la $(\boldsymbol{\gamma})$ diventa:

$$y^2 = 2px - \frac{2p}{a}x^2$$

equazione ben nota dell'ellisse (in coniugazione obliqua).

Dalla *(γ)*, con qualche semplice passaggio, si ricava successivamente:

$$\Lambda M^2 = E\Theta \times EM \times \left(1 - \frac{EM}{E\Delta}\right)$$

$$E\Delta \times \Lambda M^2 = E\Theta \times EM \times (E\Delta - EM)$$

$$E\Delta \times \Lambda M^2 = E\Theta \times EM \times \Delta M$$

$$\Lambda M^2 : (EM \times \Delta M) = E\Theta : E\Delta \qquad (\delta)$$

La proporzione *(δ)* esprime il sintomo dell'ellisse in una forma che ci sarà utile in seguito (cfr. paragrafo III).

Se, invece di collocare sulla curva un punto generico Λ, si sceglie per EM un valore arbitrario, sarà possibile costruire Λ con ***riga e compasso***.
Infatti, dopo aver ricavato il ***parametro*** $E\Theta$ – che si può ottenere dai dati mediante i teoremi citati nel paragrafo I (in commento alla ***ecthesis***), oppure servendosi del procedimento illustrato più avanti (cfr. ***paragrafo IV***, ***nota***) – e la lunghezza O$\Theta = \Xi N$, il valore di MΛ si calcolerà mediante la *(**)* (come medio proporzionale fra valori noti).
Occorrerà naturalmente conoscere la direzione di MΛ per collocare Λ nella giusta posizione.
La trattazione di Apollonio garantisce dunque (ma non esplicita) la possibilità di prelevare l'ellisse dal cono su cui giace e ridisegnarla su un piano qualsiasi con riga e compasso (punto dopo punto). Il "sintomo" serve così da un lato a caratterizzare e riconoscere l'ellisse, dall'altro permette di costruire nel piano ogni punto della curva

a partire da grandezze note, sufficienti ad individuarla. L'ellisse, da "***luogo solido***", è così ridotta a "***luogo piano***".
(Cfr. anche ***Fascicolo N° 3***).
Una costruzione dell'ellisse per punti, con riga e compasso, fondata sul sintomo, è esplicitata per es. da De l'Hospital, nel suo trattato sulle coniche del 1696. Egli suppone di conoscere (oltre al sintomo dell'ellisse):
il ***parametro*** $E\Theta$, il ***lato*** (***diametro***) ***trasverso*** $E\Delta$, la direzione della tangente all'ellisse nel punto E dove la curva è intersecata dal diametro (direzione che coincide con quella di $M\Lambda$). Scelto un valore per EM (altezza del rettangolo di base $E\Theta$), egli determina il difetto da togliere a questo rettangolo (difetto che deve essere un altro rettangolo di altezza EM simile a quello individuato da $E\Theta$ e $Z\Delta$) seguendo esattamente la procedura utilizzata da Apollonio.
Però De l'Hospital agisce su un unico piano (quello della curva), mentre Apollonio (che deve eseguire una dimostrazione nello spazio tridimensionale) opera su due piani diversi (in ***Fig.2*** la determinazione del difetto avviene nel piano del triangolo per l'asse, distinto da quello in cui giace la conica). Inoltre Apollonio non ha bisogno della tangente all'ellisse in E perché può individuare la direzione di $M\Lambda$ tracciando per M la parallela all'intersezione tra il piano secante e la base del cono. Illustriamo qui di seguito la costruzione di De l'Hospital (per facilitare il confronto con Apollonio, abbiamo mantenuto identiche notazioni).

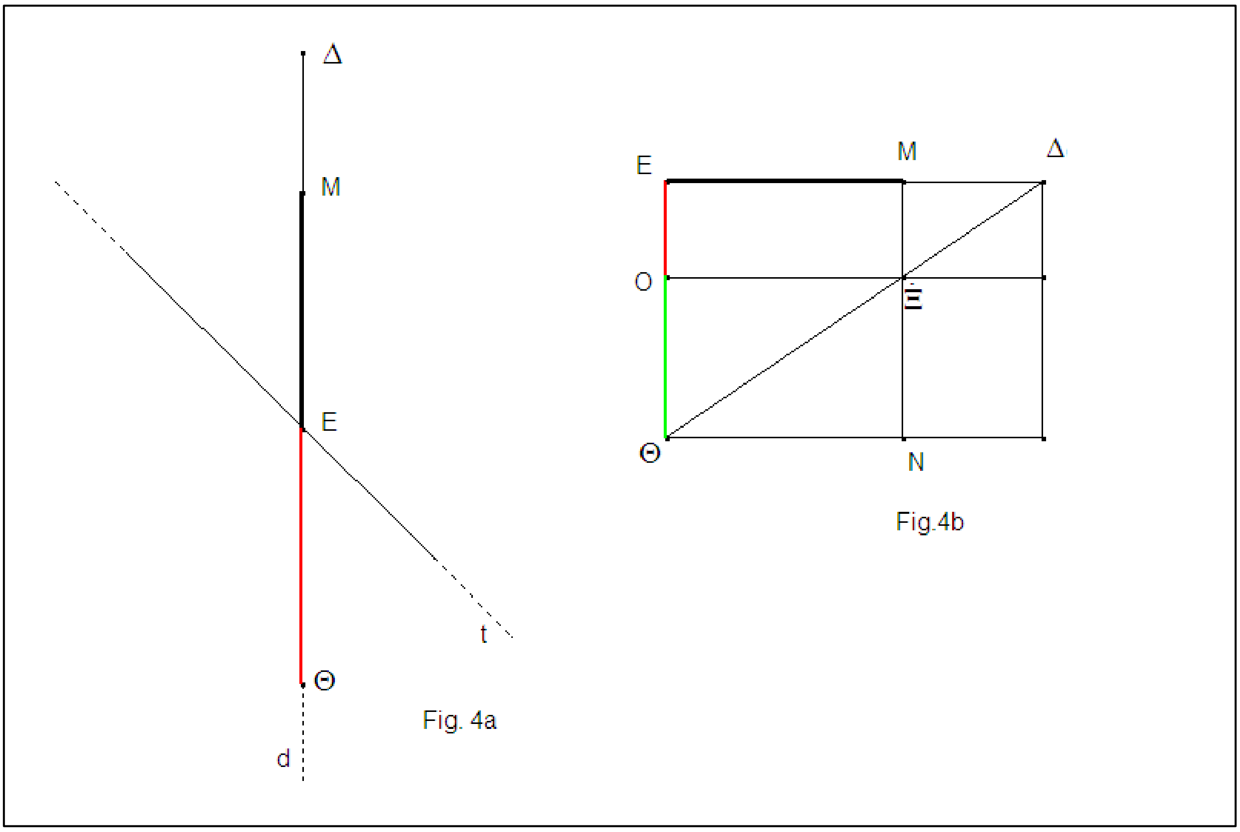


Fig. 4a
Fig.4b

In ***Fig.4a*** sono visibili i dati del problema: sulla retta Ed giacciono il ***lato (diametro) trasverso*** $E\Delta$ e il ***parametro*** $E\Theta$ ad esso relativo; Et è la retta tangente all'ellisse nell'estremo E del diametro. Nella ***Fig. 4b***, la determinazione di OΘ (parte da togliere a EΘ affinché il rettangolo di base $E\Theta - O\Theta$ abbia la superficie richiesta) avviene, come è facile controllare (cfr. ***Fig. 2***), proprio eseguendo la costruzione indicata da Apollonio.

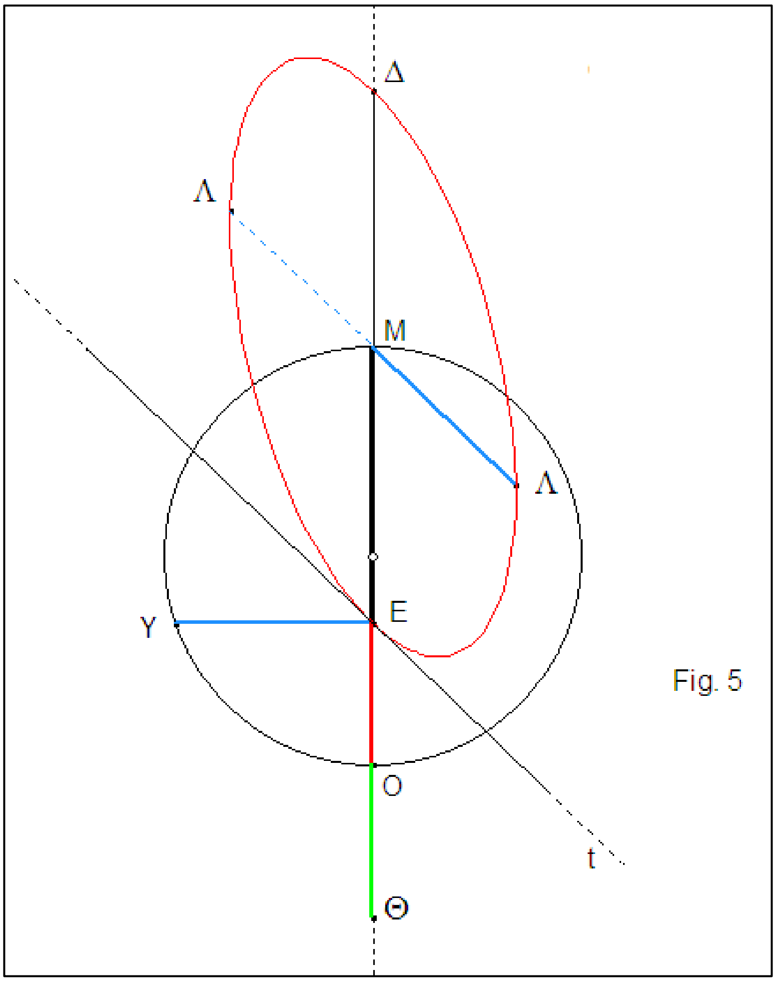


Fig. 5

Consideriamo ora la ***Fig. 5***. Dopo aver disposto su Ed la differenza
$E\Theta - O\Theta$ = EO, centrando il compasso nel punto medio fra M ed O si disegna la circonferenza avente MO come diametro. Si traccia da E la perpendicolare al diametro e si ottiene il punto Y. Risulta (teorema di Euclide) $EY^2 = EM \times (E\Theta - O\Theta)$ e quindi, confrontando con (α) e (**), EY = MΛ.
Per collocare correttamente il valore $M\Lambda$ così determinato, tracciamo da M la parallela a Et: una circonferenza di centro M e raggio $M\Lambda$ = EY ci fornirà allora due punti Λ della ellisse. La costruzione può essere iterata scegliendo ogni volta valori diversi per EM.
(Cfr. anche il file ***Costruzione di De L'Hospital: ellisse***).

Nel caso particolare in cui il piano secante sia perpendicolare al triangolo per l'asse (oppure quando sono verificate le ipotesi di Menecmo) il diametro ED diventa asse dell'ellisse sezione, e le rette $M\Lambda$ ordinatamente condotte rispetto all'asse, sono a questo perpendicolari. Se ciò accade, è possibile estendere all'ellisse la costruzione di ***Werner***. Essa coincide perfettamente con quella proposta da De L'Hospital (come si può vedere esaminando il file ***Costruzione di Werner: ellisse***). Unica differenza: la tangente in E alla curva sezione è perpendicolare alla retta $E\Delta$ (o $E\Theta$).

III.

Si può dimostrare che la definizione fornita dalla $(*)$, nelle ipotesi più restrittive di Menecmo-Euclide, permette di dare al lato retto $E\Theta$ una caratterizzazione geometrica legata in modo semplice e immediato al cono che sostiene l'ellisse.
Ricordiamo intanto che la $(*)$ $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \times K\Gamma)$ si può scrivere:
$E\Theta = (BK \cdot K\Gamma \cdot \Delta E) : AK^2$ ***(7)***

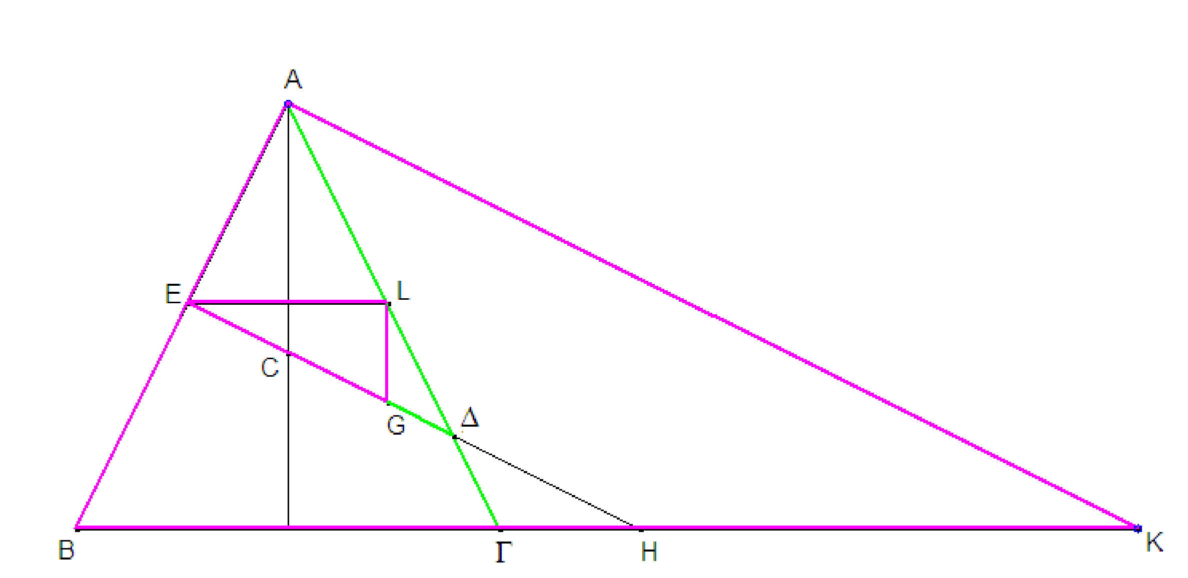


Fig.6

Nella ***Fig. 6*** il triangolo per l'asse $AB\Gamma$ è isoscele acutangolo e il piano secante, quindi la retta EH, perpendicolare al lato AB (questo prescrivono le ipotesi di Menecmo Euclide). Le rette $A\Gamma$ ed EH si incontrano in Δ ($E\Delta$ è il diametro dell'ellisse). Inoltre, AK è parallela a EH, EL parallela alla base $B\Gamma$ del triangolo: da L si è tracciata la perpendicolare a $B\Gamma$ fino ad incontrare in G il diametro $E\Delta$ dell'ellisse. La retta AC, altezza del cono e del triangolo $AB\Gamma$, ne è anche asse di simmetria.
Consideriamo i triangoli simili KAB, LEG. Si ricava la proporzione
KA : LE = BK : EG, cioè BK = (KA×EG) : LE. Sostituendo in ***(7)*** e semplificando si ottiene:
$E\Theta = (EG \times K\Gamma \times \Delta E) : (AK \times LE)$ (8)
Consideriamo ora i triangoli simili $KA\Gamma$, $EL\Delta$. Si ricava la proporzione:
$AK : \Delta E = K\Gamma : LE$, cioè $AK \times LE = \Delta E \times K\Gamma$.
Tenendo conto di quest'ultima uguaglianza la ***(8)*** può essere semplificata e diviene $E\Theta = EG$.
Poiché C è punto medio di EG si ha infine $E\Theta = 2EC$.
Dunque, nelle ipotesi di Menecmo-Euclide, il lato retto è uguale al doppio della distanza tra il punto E (vertice dell'ellisse) e il punto in cui il piano secante interseca l'altezza del cono. (Cfr. ***Fascicolo I***).

J. Bernoulli tuttavia ha dimostrato (1689: cfr. ***Fascicoli II e III***) che anche nel caso generale considerato da Apollonio è possibile, partendo dalla ***(*)***, fornire una interpretazione intuitiva nello spazio tridimensionale (e una costruzione particolarmente semplice) del lato retto di una iperbole (relativo a un diametro qualsiasi).

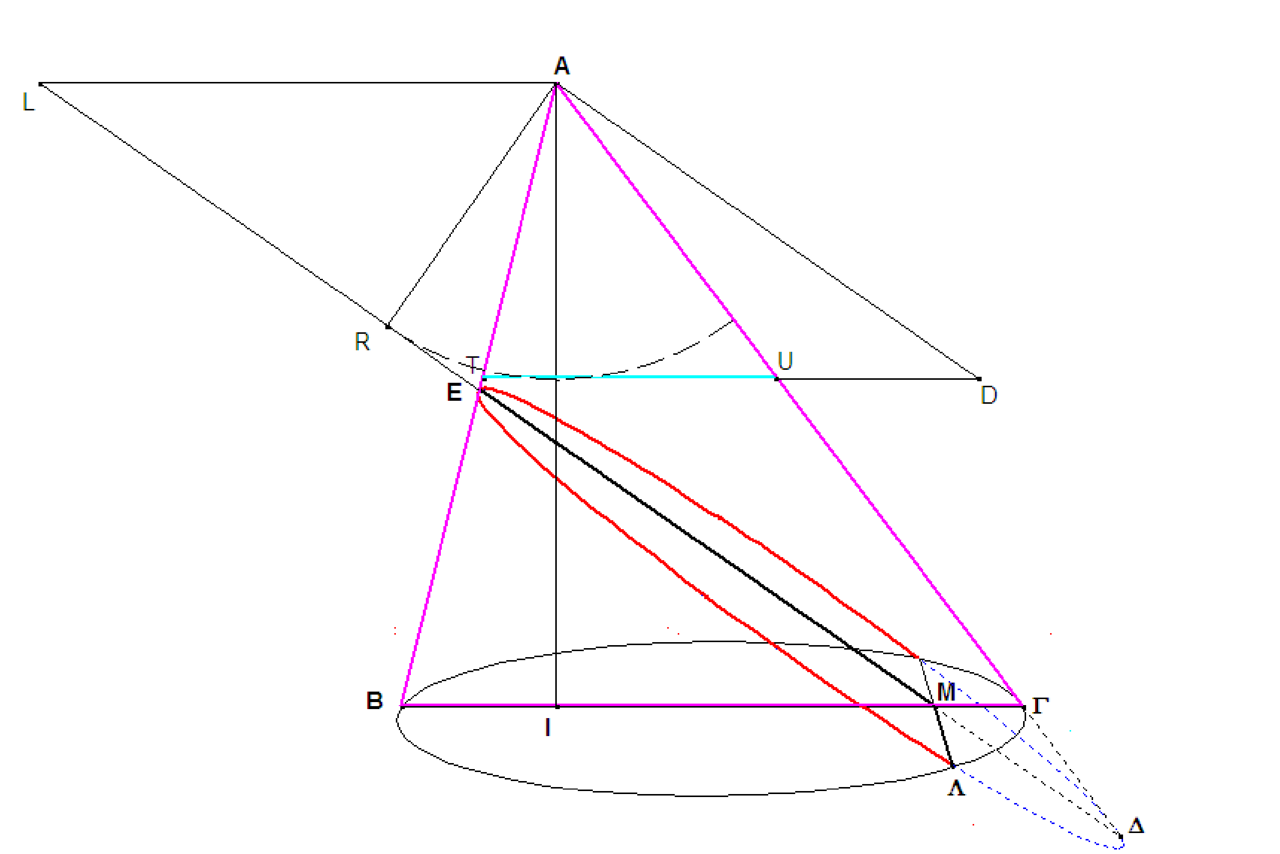


Fig. 7

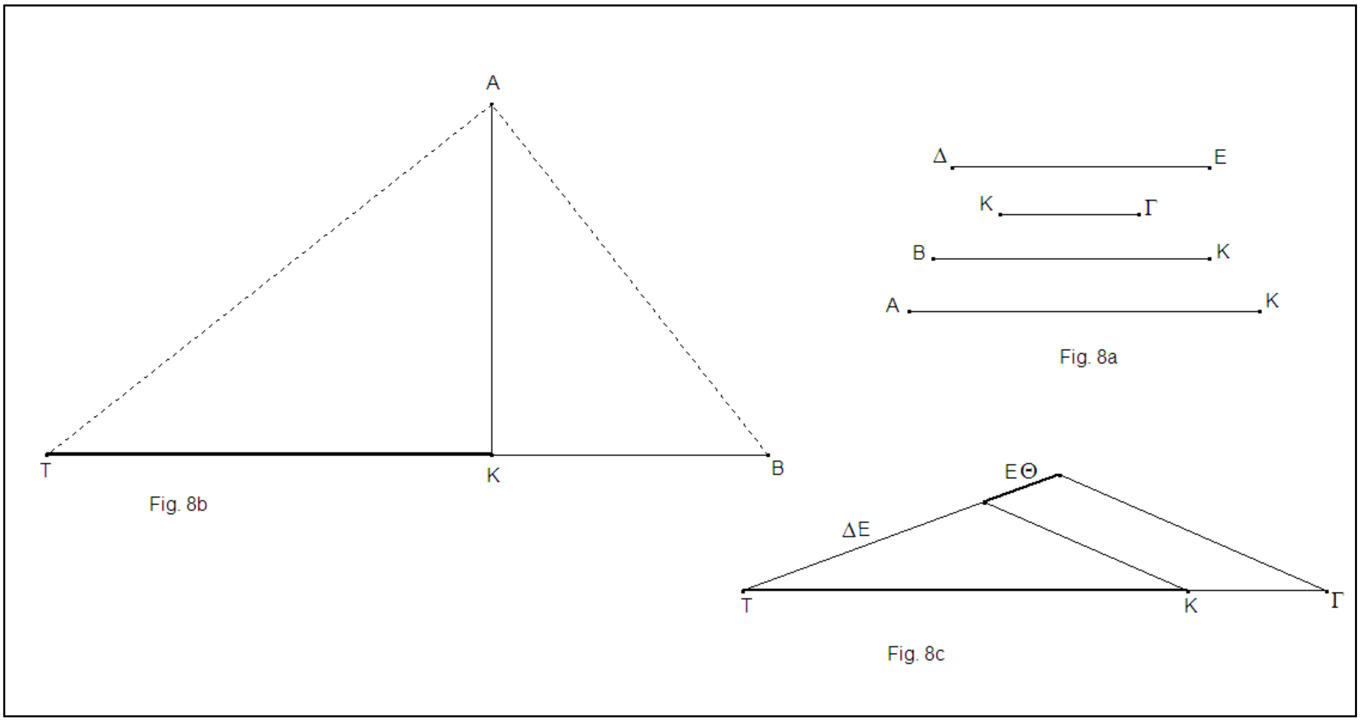
In ***Fig. 7***, i punti E, Λ, Δ individuano il piano secante (che contiene l'ellisse); i punti B, Λ, Γ individuano la circonferenza di base del cono (L è un punto della ellisse); $\mathrm{AB\Gamma}$ è il triangolo per l'asse.
Sul piano del triangolo per l'asse eseguiamo la seguente costruzione.
Dal punto A si traccia la perpendicolare AR al diametro $\mathrm{E\Delta}$ della sezione; con raggio AR si traccia quindi un arco di circonferenza (di centro A) fino ad incontrare AI, perpendicolare condotta da A alla base $\mathrm{B\Gamma}$ del triangolo; dal punto di incontro si traccia poi la parallela a $\mathrm{B\Gamma}$, che interseca in T e in U i lati del triangolo per l'asse, e in D la parallela condotta da A al diametro $\mathrm{E\Delta}$. Infine, la parallela alla base del triangolo passante per A incontra in L il prolungamento del diametro $\mathrm{E\Delta}$.
Bernoulli afferma che TU è il lato retto della ellisse relativo al diametro $\mathrm{E\Delta}$. (Cioè, utilizzando le notazioni qui adottate, TU = $\mathrm{E\Theta}$).

Ed ecco la dimostrazione (Cfr. sempre ***Fig. 7***).
Dalle coppie di triangoli simili DAT, ALE e ADU, ALΔ si deducono le proporzioni DT : AD = AL : LE, AD : UD = LΔ : AL, dalle quali si ricavano le uguaglianze: AD$\times$AL = DT$\times$LE = UD$\times$LΔ, quindi la proporzione:
DT : UD = LΔ : LE ***(9)***
Dalla ***(9),*** scomponendo, si ottiene: (DT – UD) : UD = (LΔ – LE) : LE, quindi: TU : UD = EΔ : LE. Da quest'ultima, permutando i medi:
TU : EΔ = UD : LE = (UD : AD)$\times$(AD : LE). Ma è (Cfr. ***Fig. 7***) AD = AL.
Segue allora: TU : EΔ = UD : LE = (UD : AL)$\times$(AL : LE) ***(10)***.
Consideriamo ora le coppie di triangoli simili ALE, MEB e AUD, $\mathrm{M\Gamma\Delta}$.
Si ottengono le proporzioni:
AL : LE = MB : EM
UD : AD = $\mathrm{M\Gamma} : \mathrm{M\Delta} =$ (poiché AD = AL) = UD : AL
Sostituendo nella (10): TU : EΔ = ($\mathrm{M\Gamma} : \mathrm{M\Delta}) \times$ (MB : EM).
Quest'ultima uguaglianza si può anche scrivere:
TU : EΔ = (M$\Gamma\times$MB) : (M$\Delta\times$EM) ***(11)***
Ma (ricordando il teorema di Euclide) (M$\Gamma\times$MB) = $M\Lambda^2$
La ***(11)*** allora diventa:
TU : E$\Delta = \mathrm{M}\Lambda^2 : (\mathrm{M\Delta}\times\mathrm{EM})$ (12)
Confrontiamo la (12) con il sintomo dell'ellisse scritto nella forma (δ) (Cfr. ***paragrafo II***). Si ha immediatamente:
TU : EΔ = $\mathrm{E\Theta} : \mathrm{E\Delta}$, quindi TU = EQ, ***come volevasi dimostrare.***

*Naturalmente, se in **Fig7** – ceteris paribus – si cambia la lunghezza di EM, cambia anche il punto Λ sull'arco dell'ellisse presa in esame. Perciò la precedente dimostrazione è valida **per ogni punto** di tale curva.*
*Cambiando invece il piano secante e la posizione del vertice A o l'ampiezza dell'angolo in A, cambia la curva considerata. Perciò la precedente dimostrazione è valida **per ogni ellisse.***

IV.

Per la costruzione delle ***Fig. 2 e 3*** occorre conoscere il lato retto (parametro) della ellisse. Lo si può ottenere nel modo che ora spieghiamo.
Si ricavano, dal triangolo per l'asse relativo al cono utilizzato, i segmenti che appaiono nella proporzione
ΔE : EΘ = AK^2: (BK $\times$ KΓ) $(*)$ (che – come sappiamo – è la definizione del lato retto di una ellisse). Supponiamo che questi segmenti siano quelli rappresentati in ***Fig. 8a***.



Si può facilmente determinare, con la costruzione di ***Fig. 8b*** (usando il solito teorema di Euclide) un rettangolo BK×KT equivalente al quadrato di lato AK. La (∗) si scrive allora:

$\Delta E : E\Theta = (BK \times KT) : (BK \times K\Gamma)$, cioè $\Delta E : E\Theta = KT : K\Gamma$.

Quest'ultima proporzione permette di ricavare il lato retto $E\Theta$ (ad esempio col procedimento indicato in ***Fig. 8c***).

Avvertiamo esplicitamente che nelle Fig. 2 e 3 (da noi eseguite seguendo le regole della prospettiva) le dimensioni degli oggetti rappresentati possono essere diverse da quelle reali.

Apollonio non conosceva la nostra prospettiva: anch'egli tuttavia cerca di rappresentare con figure piane le situazioni tridimensionali che prende in considerazione.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, febbraio 2010