Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo *N°3*

L' IPERBOLE NEL TRATTATO DI APOLLONIO DA PERGA DEDUZIONE DEL SINTOMO

I.

Richiamiamo anzitutto alcune definizioni e proprietà esposte da Apollonio nelle prime pagine del ***Libro I*** delle ***Coniche***.

*Si consiglia di accompagnare la lettura con un accurato esame del **modello fisico** oppure con la esplorazione del file interattivo"**Apollonio: iperbole**".*

Dati un cerchio ΒΓ e un punto A esterno al piano del cerchio (*cfr. Fig. 1*), una retta per A che si muova lungo la circonferenza del cerchio genera un cono (doppio). Il cerchio viene detto base del cono. Asse del cono è la retta che unisce

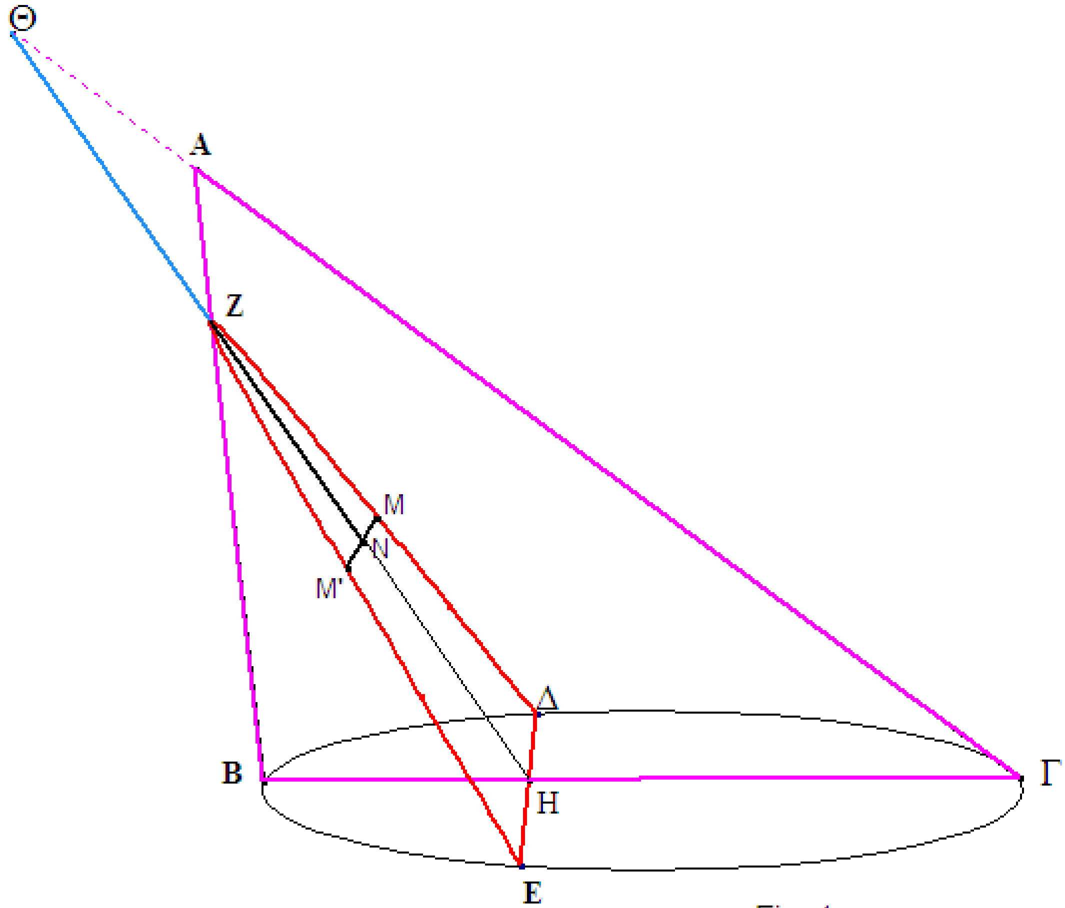


Fig. 1

A al centro del cerchio (non rappresentata in figura). Se questa retta è perpendicolare alla base, il cono viene detto circolare retto; in caso contrario, scaleno o obliquo. Una sezione del cono mediante un piano tagli il piano della base in una retta $\Delta\mathrm{E}$. Se si considera il diametro $\mathrm{B}\Gamma$ cerchio base perpendicolare a $\Delta\mathrm{E}$, allora $\mathrm{AB}\Gamma$ è un triangolo (triangolo assiale) nel cui interno giace l'asse del cono. Sia ZH la retta determinata dall'incontro tra il piano della sezione conica e quello del triangolo assiale (in Fig. 1 il piano della conica è stato scelto in modo tale che la retta ZH, prolungata, incontri l'altro lato del triangolo assiale – quello a cui non appartiene Z – in un punto Θ posto al disopra del vertice A). ZH non è necessariamente un asse della sezione conica, e non è necessariamente perpendicolare a $\Delta\mathrm{E}$ se il cono è scaleno. (Si ha perpendicolarità tra ZH e $\Delta\mathrm{E}$ solo se il cono è retto oppure quando il piano di $\mathrm{AB}\Gamma$ è perpendicolare alla base di un cono scaleno). Sia poi MM' una qualsiasi corda della conica parallela a $\Delta\mathrm{E}$ (e quindi non necessariamente perpendicolare a ZH). Apollonio prova allora che MM' è bisecata da ZH in N sicché è la metà di MM'. ($\Theta\mathrm{H}$ è in ogni caso un **diametro** della sezione). Inoltre, Apollonio dimostra (prop. XVII del Libro I) che la retta tangente alla sezione conica in Z è parallela alle corde MM' (le quali si dicono ordinatamente condotte rispetto al diametro $\Theta\mathrm{H}$)

Traduciamo, dal trattato sulle coniche di Apollonio, la ***proposizione XII*** (libro I, pag. 43).

Prop. XII.

Protasis (enunciazione):

Dato un cono, tagliamolo con due piani. Uno passi per l'asse, l'altro intersechi la base del cono lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo per l'asse; inoltre il diametro della sezione generata da questo secondo piano incontri uno dei lati del triangolo per l'asse al di sopra del vertice del cono. Ogni retta che da un punto qualsiasi della sezione sia condotta fino al diametro parallelamente alla comune intersezione tra il piano secante e la base del cono, è lato di un quadrato equivalente alla superficie applicata ad una seconda retta che abbia con quella situata sul prolungamento del diametro e compresa nell'angolo esterno al triangolo per l'asse il medesimo rapporto esistente tra il quadrato della retta parallela al diametro della sezione e compresa tra il vertice e la base del triangolo per l'asse, e il rettangolo formato dalle parti in cui tale parallela divide la base:
avendo la superficie applicata una altezza uguale alla distanza tra il vertice della sezione e il punto in cui la prima retta incontra il diametro, con un eccesso simile al

rettangolo i cui lati sono la seconda retta e quella appartenente al diametro e contenuta nell'angolo esterno al triangolo per l'asse.
Siffatta sezione si chiamerà ***Iperbole.***

Ricordiamo che in Apollonio (ed Euclide) il termine ***retta*** indica sempre un segmento rettilineo prolungabile a piacere.
E' evidente che la lettura di questa proposizione generale (senza avere sott'occhio alcuna figura o alcun modello) risulta faticosa e difficile. L'ostacolo viene eliminato dalla successiva rappresentazione
(cfr. Fascicolo N° 2)

Ecthesis (rappresentazione).

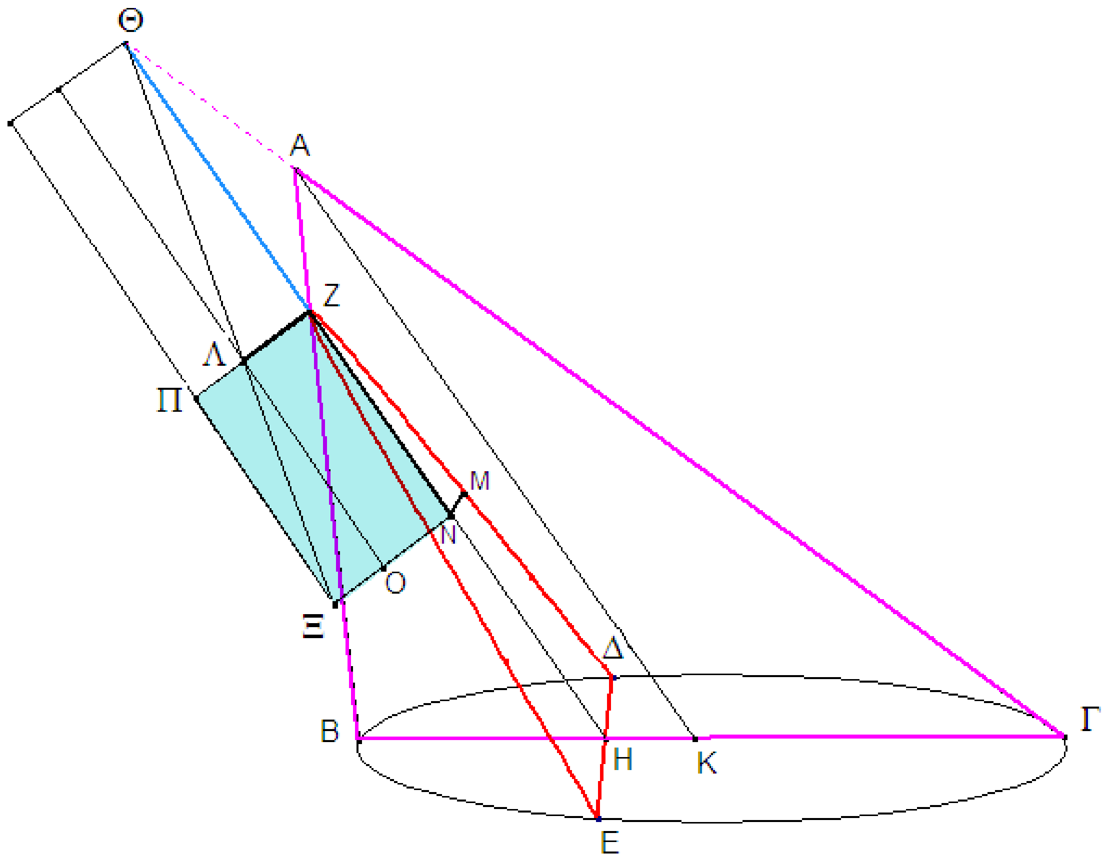


Fig. 2

(Cfr. Fig. 2; cfr. anche file interattivo "**Lato retto dell'iperbole**") *Il cono abbia vertice nel punto A, come base il cerchio $B\Gamma$; il piano passante per l'asse generi come sezione il triangolo $AB\Gamma$. Un altro piano tagli la base del cono lungo una retta perpendicolare alla base $B\Gamma$ del triangolo $AB\Gamma$, e la superficie del cono lungo la curva ΔZE il cui diametro ZH, prolungato, incontri il lato $A\Gamma$ del triangolo $AB\Gamma$ nel* *punto Θ. Condotta poi da A la parallela AK al diametro ZH della curva sezione ΔZE (K è punto di incontro tra tale parallela e $B\Gamma$), si disegni, in direzione perpendicolare a ZH, una retta Z tale che :*

$KA^2:(BK \times K\Gamma) = Z\Theta : Z\Delta$ (*)

Si prenda ora un punto qualsiasi M sulla curva sezione; da M si tracci MN, parallela alla retta ΔE; da N si tracci poi $NO\Xi$ parallela alla retta $Z\Lambda$. Si congiungano i punti Θ e Λ, prolungando fino a Ξ. Infine, dai punti Λ, Ξ si mandino le parallele ΛO, $\Xi\Pi$ alla retta ZN.

Io dico che è $MN^2 = (ZN \times N\Xi)$ (**) cioè la superficie MN^2 si applica alla retta Z con altezza ZN e un eccesso ($\Delta O \times O\Xi$) simile al rettangolo ($\Theta Z \times Z\Lambda$).

Come vedremo in seguito, $Z\Lambda$ è il ***lato retto*** (***parametro***) relativo al diametro ZH (o al ***lato trasverso*** $Z\Theta$) della ***iperbole.*** La definizione (*) non fornisce una visualizzazione intuitiva del segmento $Z\Lambda$ questo "difetto" verrà eliminato in uno scritto di Bernoulli del 1689 (ce ne occuperemo più avanti; cfr. anche ***Fascicolo N°2***). La (*) però consente di determinare $Z\Lambda$ con ***riga e compasso***: infatti utilizzando le proposizioni ***41***, ***42***, ***43*** e ***44*** del ***libro I degli Elementi di Euclide*** è possibile sostituire al rapporto $KA^2:(BK \times K\Gamma)$ che compare al primo membro della proporzione *(*)* un rapporto tra segmenti, sicché $Z\Lambda$ si costruirà come quarto proporzionale fra tre segmenti assegnati.

Nell'enunciato della ***proprietà caratteristica*** (***sintomo***) *(**)*, Apollonio fa esplicito riferimento alla ***applicazione iperbolica delle aree,*** e ciò giustifica il nome di ***Iperbole*** dato alla sezione qui considerata.

*Per maggiori informazioni, si leggano, nella ed. UTET degli **Elementi di Euclide** (1970) le note di A. Frajese alle seguenti proposizioni: **libro II, prop. 5; libro VI, prop. 27, 28**).* 5

Cataschéuè (preparazione) *(Cfr. Fig. 3)*

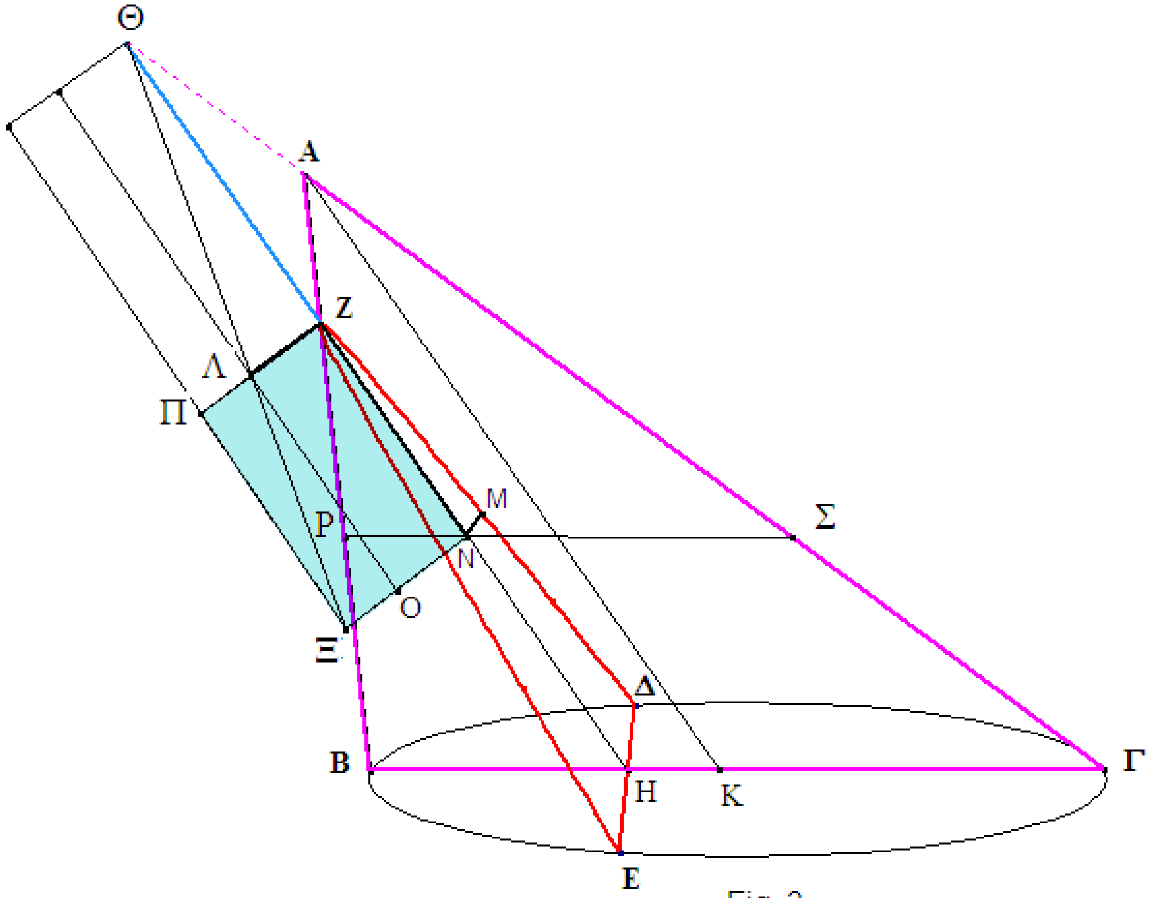


Fig. 3

Si tracci la retta $PN\Sigma$ parallela a $B\Gamma$ e passante per N.
Anche in questo caso, come in quello della parabola (*cfr. Fascicolo N° 2*) la preparazione (necessaria per sviluppare il ragionamento dimostrativo) è semplicissima.

Apodeixis (dimostrazione) *(Cfr. Fig. 3)*

Poiché la retta NM è parallela a ΔE, il piano individuato dalle rette NM e $P\Sigma$ è parallelo al piano delle rette $B\Gamma$ e ΔE, cioè alla base del cono. Dunque l'intersezione tra il cono e il piano delle rette NM e $P\Sigma$ sarà una circonferenza di diametro $PN\Sigma$, al quale diametro la retta MN risulterà perpendicolare. Possiamo allora scrivere:
$PN \times N\Sigma = MN^2$ *(1). Ma la (*) (cfr. sopra) ci dice che:*
$KA^2 : (BK \times K\Gamma) = Z\Theta : Z\Lambda$ *(2).*
Possiamo anche scrivere:
$KA^2 : (BK \times K\Gamma) = (KA : K\Gamma)(KA : BK)$ *(3))*
Confrontando (2) e (3) si ottiene:

$Z\Theta : Z\Lambda = (KA : K\Gamma)(KA : BK)$ (4)
Ma dalla similitudine dei triangoli $AK\Gamma$, $\Theta H\Gamma$, $\Theta N\Sigma$ si ricava:
$KA : K\Gamma = \Theta H : H\Gamma = \Theta N : N\Sigma$.
Si ha inoltre, dalla similitudine dei triangoli AKB, ZHB, ZNP
$KA : KB = ZH : HB = ZN : NP$
Tenendo conto di queste uguaglianze, la (4) si riscrive così:
$Z\Theta : Z\Delta = (\Theta N : N\Sigma) \text{ x } (ZN : NP) = (\Theta N \text{ x } NZ):(N\Sigma \text{ x } NP)$ (5).
Sono simili anche i triangoli $\Theta Z\Lambda$ e $\Theta N\Sigma$ perciò dalla (5) si ha:
$(\Theta N \text{ x } NZ):(N\Sigma \text{ x } NP) = Z\Theta : Z\Lambda = \Theta N : N\Xi$ (6)
Costruendo con ΘN e $N\Xi$ due rettangoli aventi ZN come altezza comune, risulta
$\Theta N : N\Xi = (\Theta N \text{ x } NZ):(N\Xi \text{ x } NZ)$, quindi la (6) diventa:
$(\Theta N \text{ x } NZ):(N\Sigma \text{ x } NP) = (\Theta N \text{ x } NZ):(N\Xi \text{ x } NZ)$ cioè:
$(N\Sigma \text{ x } NP) = (N\Xi \text{ x } NZ)$ (7)
Ricordando la (1) si ha subito dalla (7):
*$MN^2 = (N\Xi \text{ x } NZ)$, come volevasi dimostrare (cfr.(**)).*
Possiamo quindi concludere che il quadrato di lato MN ha superficie uguale al rettangolo ΞZ, cioè è applicato alla retta $Z\Lambda$ con una altezza ZN e un eccesso uguale al rettangolo $\Lambda\Xi$ simile al rettangolo $\Theta\Lambda$

Riaffermazione (conclusione)

*Ogni sezione conica che verifica la proprietà dimostrata si chiama **iperbole**; è il **parametro** relativo alle rette **ordinatamente condotte** al **diametro** ZH; si chiama anche **lato retto, lato** (**diametro**) **trasverso**.*

II.

E' chiaro che scegliere il punto *M* (appartenente alla sezione conica) significa assegnare anche (sul diametro della curva) l'altezza *ZN* del rettangolo (equivalente al quadrato di lato *MN*) da applicare al parametro $Z\Lambda$. Per avere la base di tale rettangolo occorre (Fig. 2) prolungare $Z\Lambda$ fino a Π di un segmento $\Lambda\Pi = O\Xi$, in modo che l'eccesso richiesto (simile al rettangolo ΘA) risulti determinato. Abbiamo visto che Apollonio, nelle pagine dedicate alla proposizione XII del Libro I, fornisce (*cfr. **ecthesis***) una costruzione con riga e compasso per ottenere $\Lambda\Pi = O\Xi$ partendo dalle grandezze note $Z\Theta$ e $Z\Lambda$: la dimostrazione successiva consiste appunto nel provare che il rettangolo così costruito (altezza ZN, base $Z\Lambda+\Lambda\Pi$) è equivalente al quadrato di lato MN.

La *(**)*, poiché $N\Xi = NO + O\Xi = Z\Lambda + \Lambda\Pi$, si può scrivere:

$MN^2 = (Z\Lambda + O\Xi) \times ZN \quad (\alpha)$.

Ma, essendo $\Lambda O = ZN$, dalla similitudine dei triangoli $\Theta Z\Lambda$ e $\Lambda O\Xi$ (cfr. sempre la costruzione illustrata in Fig. 2) si ricava $O\Xi : ZN = Z\Lambda : Z\Theta$. Pertanto:

$O\Xi = (ZN \times Z\Lambda) : Z\Theta \quad (\beta)$.

Riscriviamo ora (α) tenendo conto di (β):

$(\gamma) \quad MN^2 = (Z\Lambda \times ZN) + (Z\Lambda / Z\Theta) \times ZN^2$

Ovviamente, i simboli e la cultura dell'algebra sono del tutto estranei allo spazio teorico della geometria alessandrina. Ma per noi è difficile resistere alla tentazione di farne uso. Se dunque poniamo: MN = y (ordinata di M), $ZN = x$ (ascissa di M), $Z\Lambda = 2p$ (parametro relativo al diametro considerato), $Z\Theta = a$ (diametro trasverso), la (γ) diventa:

$y2 = 2px + (2p/a)x^2$
equazione ben nota dell'iperbole (in coniugazione obliqua).

Dalla (γ), con qualche semplice passaggio, si ricava successivamente:

$MN^2 = (Z\Lambda \times ZN)(1 + ZN/Z\Theta)$

$Z\Theta \times MN^2 = (Z\Lambda \times ZN)(Z\Theta + ZN)$

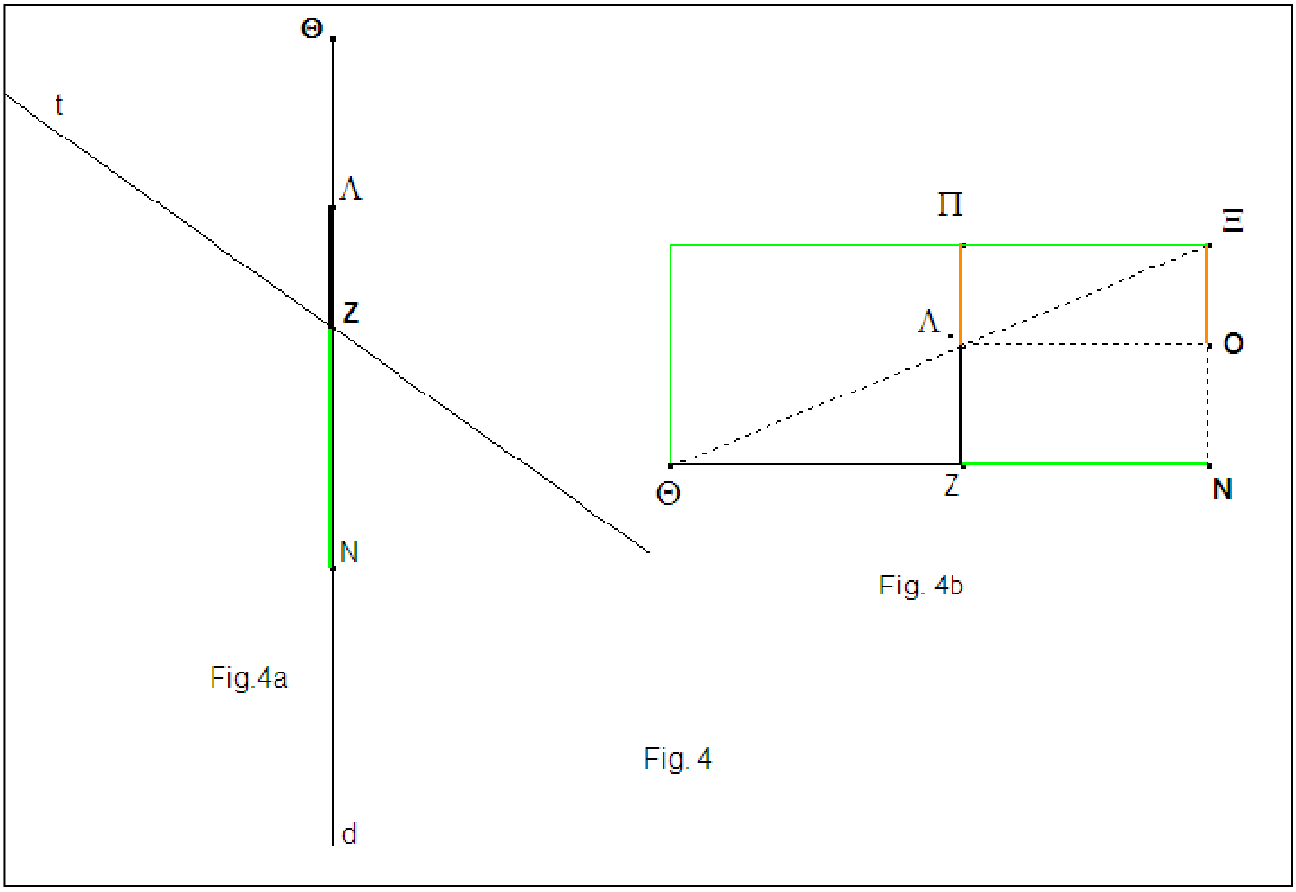
$Z\Theta \times MN^2 = Z\Lambda \times ZN \times N\Theta$

$MN^2 : (ZN \times N\Theta) = Z\Lambda : Z\Theta \quad (\delta)$

La proporzione (δ) esprime il sintomo dell'iperbole in una forma che ci sarà utile in seguito.

Osserviamo ora che se (invece di collocare un punto *M* sulla curva) scegliamo per Z*N* un valore arbitrario, potremo costruire M con riga e compasso: si ricaverà anzitutto $Z\Lambda$ (*vedi sopra, paragrafo I, commento alla ecthesis*), poi $LP = OX$, infine

MN mediante la *(**)*, cioè come medio proporzionale fra segmenti noti. Occorrerà naturalmente conoscere la direzione di MN per collocare M nella giusta posizione.
La trattazione di Apollonio garantisce dunque (ma non esplicita) la possibilità di prelevare l'iperbole dal cono su cui giace e ridisegnarla su un piano qualsiasi con riga e compasso (punto dopo punto). Il "sintomo" serve così da un lato a caratterizzare e riconoscere la curva, dall'altro permette di costruire nel piano ogni punto della curva a partire da grandezze note, sufficienti ad individuarla. L'iperbole, da "***luogo solido***", è così ridotta a "***luogo piano***".
(*cfr. anche Fascicolo N° 2).*
Questa costruzione dell'iperbole per punti con riga e compasso fondata sul sintomo è resa esplicita da De l'Hospital, nel suo trattato sulle coniche del 1696. De l'Hospital suppone di conoscere (oltre al sintomo dell'iperbole) il ***parametro*** $Z\Lambda$, il ***lato*** (***diametro***) ***trasverso*** $Z\Theta$ e la direzione della tangente all'iperbole nel punto $Z\Lambda$ dove la curva è intersecata dal diametro (direzione che coincide con quella di MN). Scelto un valore per ZN (altezza del rettangolo di base $Z\Lambda$), egli determina l'eccesso da aggiungere a questo rettangolo (eccesso che deve essere un altro rettangolo di altezza ZN simile a quello individuato da $Z\Lambda$ e $Z\Theta$) seguendo esattamente la procedura utilizzata da Apollonio.
Però De l'Hospital agisce su un unico piano (quello della curva), mentre Apollonio (che deve eseguire una dimostrazione nello spazio tridimensionale) opera su due piani diversi (in Fig. 2 la determinazione dell'eccesso avviene nel piano del triangolo per l'asse, distinto da quello in cui giace la conica). Inoltre Apollonio non ha bisogno della tangente all'iperbole in Z perché può individuare la direzione di MN tracciando per N la parallela all'intersezione tra il piano secante e la base del cono.
Illustriamo qui di seguito la costruzione di De l'Hospital (per facilitare il confronto con Apollonio, abbiamo mantenuto identiche notazioni).



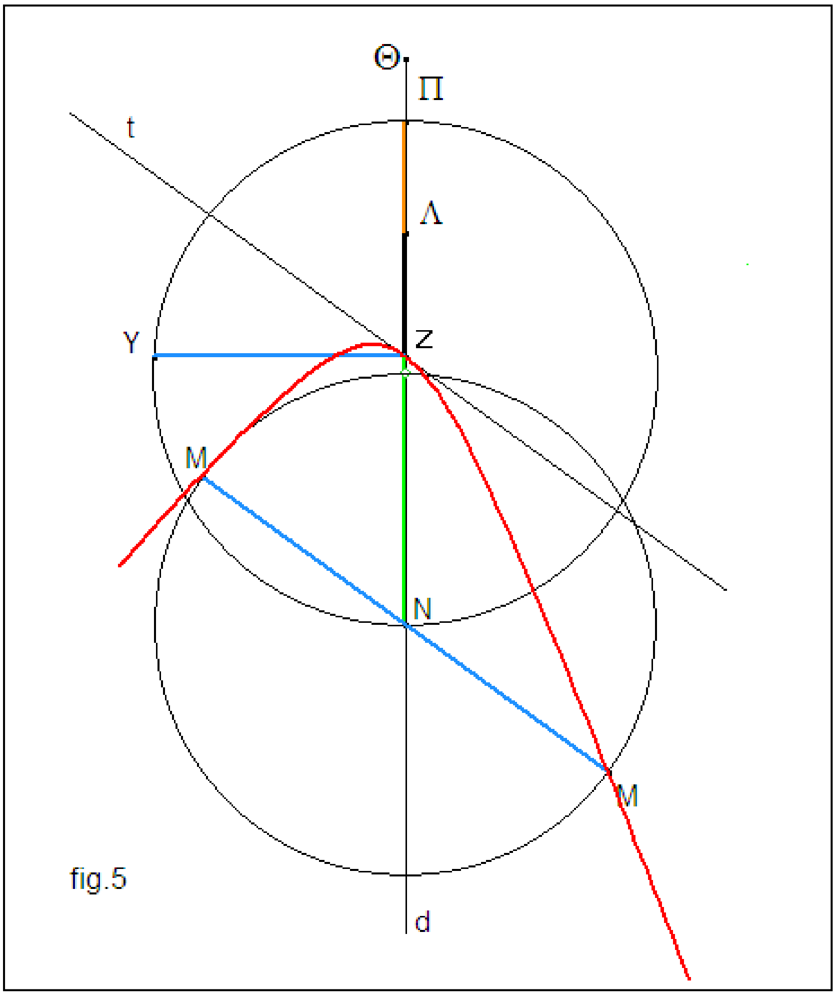
In Fig. 4a sono visibili i dati del problema: sulla retta Zd giacciono il ***lato*** (***diametro***) ***trasverso*** $Z\Theta$ e il ***parametro*** $Z\Lambda$ ad esso relativo; Zt è la retta tangente all'iperbole nell'estremo Z del diametro. Nella Fig. 4b, la determinazione di $\Lambda\Pi$ (segmento da aggiungere a affinché il rettangolo di base $Z\Lambda + \Lambda\Pi$ abbia la superficie richiesta) avviene, come è facile controllare (*cfr. Fig. 2*), proprio eseguendo la costruzione indicata da Apollonio.

Spostiamoci ora sulla Fig. 5. Dopo aver disposto su $Z\Theta$ la somma $Z\Lambda + \Lambda\Pi$ centrando il compasso nel punto medio fra N e Π si disegna la circonferenza avente $N\Pi$ come diametro. Tracciando da Z la perpendicolare al diametro, si ottiene il punto Y. Risulta (teorema di Euclide)

$ZY^2 = ZN \times (Z\Lambda + \Lambda\Pi)$, e quindi, confrontando con (α) e $(**)$, $ZY = MN$.

Per collocare correttamente il valore MN così determinato, tracciamo da N la parallela a Zt: una circonferenza di centro N e raggio MN ci fornirà allora due punti M della iperbole. La costruzione può essere iterata scegliendo ogni volta valori diversi per ZN.

(*Cfr. anche il file* [***Costruzione di De l'Hospital: Iperbole***]).



Nel caso particolare in cui il piano secante sia perpendicolare al triangolo per l'asse (oppure quando sono verificate le ipotesi di Menecmo) il diametro ZH diventa asse dell'iperbole sezione, e le rette NM, ordinatamente condotte rispetto all'asse, sono a questo perpendicolari.
Se ciò accade, è possibile estendere all'iperbole la costruzione di ***Werner*** (*cfr. Fascicolo 2*). Essa coincide perfettamente con quella proposta da De l'Hospital, come si può vedere esaminando il file interattivo ***Costruzione di Werner: Iperbole***). Unica differenza: la tangente in Z alla curva sezione è perpendicolare alla retta ZN (o $Z\Theta$).

III.

Si può dimostrare che la definizione fornita dalla *(*)*, nelle ipotesi più restrittive di Menecmo-Euclide, permette di dare al lato retto una caratterizzazione geometrica legata al cono in modo semplice e immediato.
Ricordiamo intanto che la (*) $KA^2:(BK \times K\Gamma) = Z\Theta : Z\Lambda$ si può scrivere:
$Z\Lambda = (BK \times K\Gamma \times Z\Theta): KA^2$ *(8)*

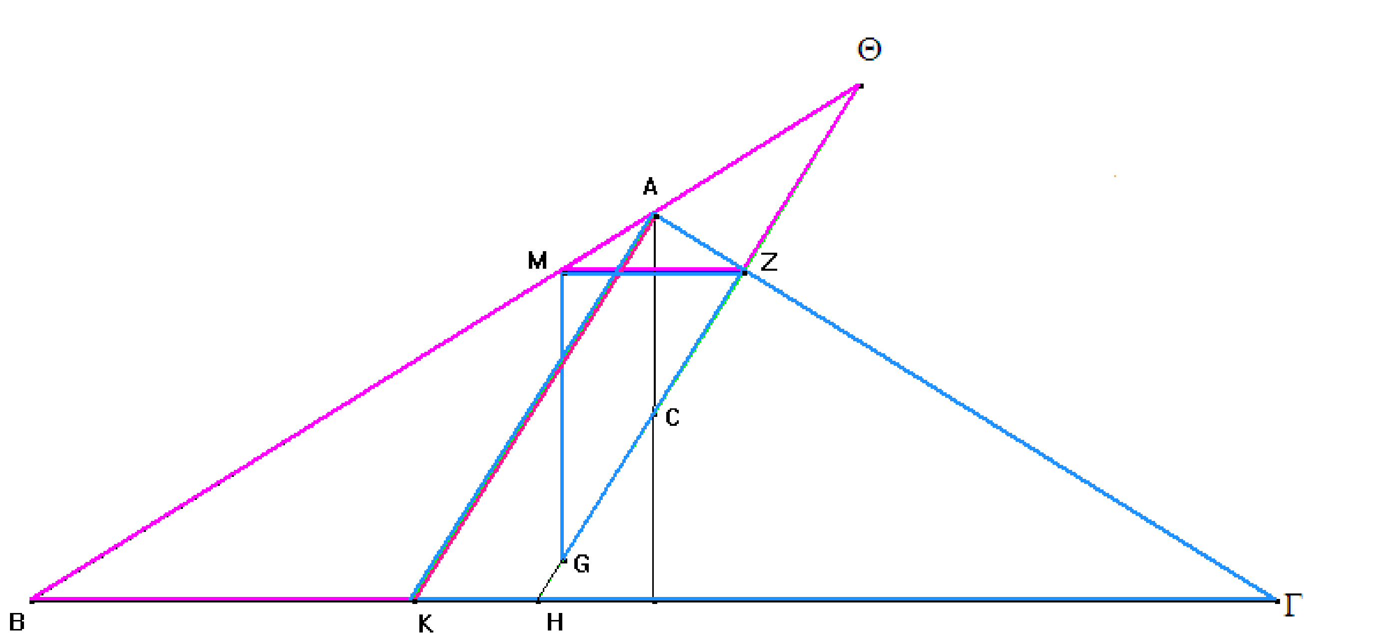


fig.6

Nella Fig. 6 il triangolo per l'asse $AB\Gamma$ è isoscele ottusangolo e il piano secante, quindi la retta ZH, perpendicolare al lato $A\Gamma$ (questo prescrivono le ipotesi di Menecmo-Euclide). Le rette AB e ZH si incontrano in Θ ($Z\Theta$ è il lato trasverso dell'iperbole). Inoltre AK è parallela a ZH, ZM parallela alla base $B\Gamma$ del triangolo: da M si è tracciata la perpendicolare a fino ad incontrare in G il diametro ZH dell'iperbole. La retta AC, altezza del cono e del triangolo $AB\Gamma$, ne è anche asse di simmetria.

Consideriamo i triangoli simili $KA\Gamma$, ZMG. Si ricava la proporzione

$KA : MZ = K\Gamma : ZG$, da cui $K\Gamma = (KA \times ZG) : MZ$: sostituendo questa espressione di $K\Gamma$ nella *(8)* e semplificando si ottiene:

$Z\Lambda = (BK \times Z\Theta \times ZG) : (KA \times MZ)$ *(9)*

Consideriamo ora i triangoli simili BKA, $MZ\Theta$. Si ricava la proporzione

$KA : BK = Z\Theta : MZ$, da cui $KA \times MZ = BK \times ZQ$: tenendo conto di questa uguaglianza la *(9)* può essere semplificata e diviene: $Z\Lambda = ZG$.

Poiché C è punto medio di ZG si ha infine: $Z\Lambda = 2ZC$.

Dunque , nelle ipotesi di Menecmo-Euclide, il lato retto è uguale al doppio della distanza tra il punto Z (vertice dell'iperbole) e il punto in cui il piano secante interseca l'altezza del cono. (*Cfr. Fascicolo 1*)

J. Bernoulli tuttavia ha dimostrato (1689: *cfr. Fascicolo 2*) che anche nel caso generale considerato da Apollonio è possibile, partendo dalla *(*)* fornire una interpretazione intuitiva nello spazio tridimensionale (e una costruzione particolarmente semplice) del lato retto di una iperbole (relativo a un diametro qualsiasi).

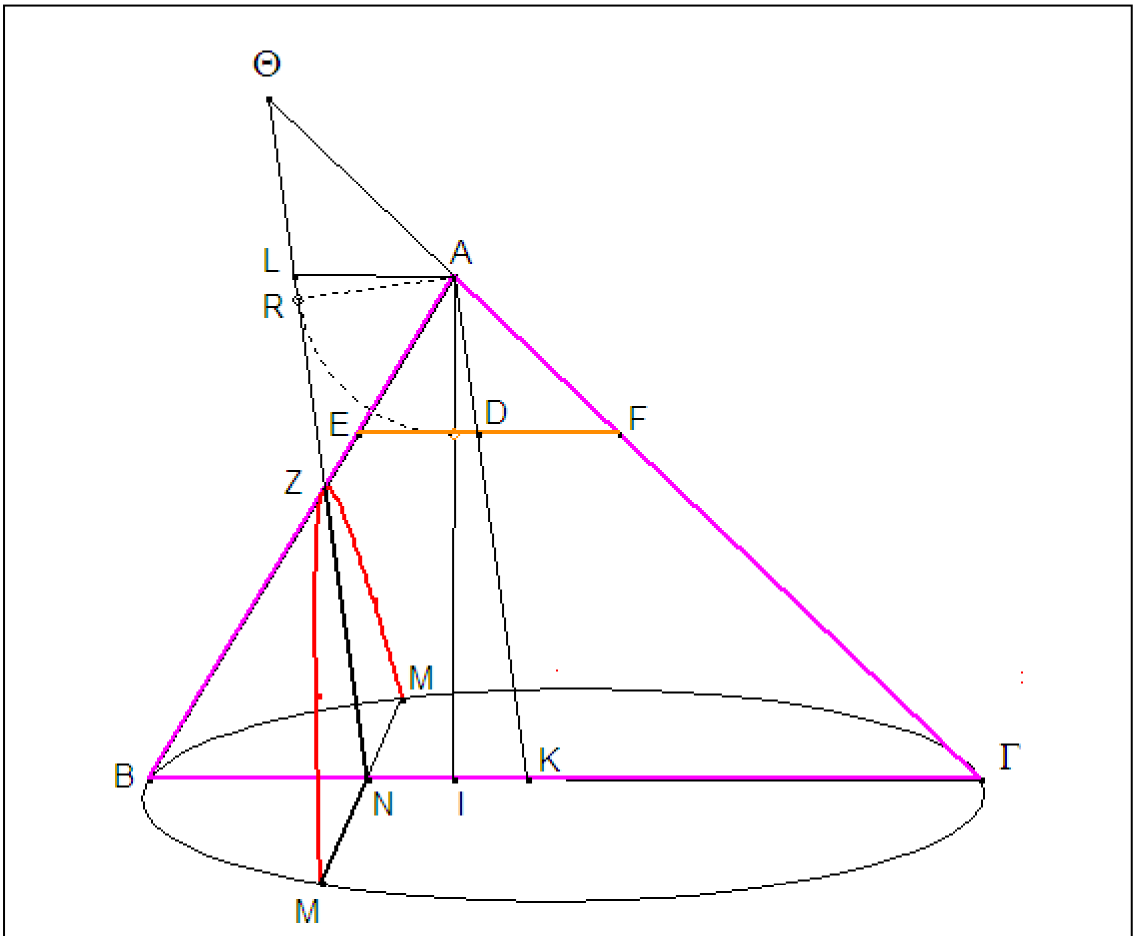


fig.7

In Fig.7, i punti M,N,Z individuano il piano secante (che contiene l'iperbole) ; i punti B, M, Γ individuano la circonferenza di base del cono; $AB\Gamma$ è il triangolo per l'asse. Sul piano del triangolo per l'asse eseguiamo la seguente costruzione.

Dal punto A si traccia la perpendicolare AR al diametro ZN della sezione; con raggio AR si traccia quindi un arco di circonferenza (di centro A) fino ad incontrare AI, perpendicolare condotta da A alla base $B\Gamma$ del triangolo;

dal punto di incontro si traccia infine la parallela a $B\Gamma$, che interseca in E ed F i lati del triangolo per l'asse. Bernoulli afferma che EF è il lato retto della iperbole relativo al diametro ZN. (Cioè – utilizzando le notazioni qui adottate – $EF = Z\Lambda$)..
Ed ecco la dimostrazione. (*Cfr. sempre Fig. 7*)
Dalle coppie di triangoli simili DAE, ALZ e ADF, $AL\Theta$ si deducono le proporzioni
$DE : AD = AL : LZ$, $AD : FD = L\Theta : AL$, da cui si ricavano le uguaglianze:
$AD \times AL = DE \times LZ = FD \times L\Theta$, quindi la proporzione:
$FD : DE = LZ : L\Theta$, *(10).*
Dalla (10), componendo, si ottiene:
$(FD + DE) : DE = (ZL + L\Theta) : L\Theta$, quindi:
$EF : DE = Z\Theta : L\Theta$. Da quest'ultima, permutando i medi:
$EF : Z\Theta = DE : L\Theta$ = (moltiplicando e dividendo per AD) =
$= (DE : AD) \times (AD : L\Theta)$.
Ma è (cfr. Fig. 5): $AD = AL$. Segue che:
$EF : Z\Theta = DE : L\Theta = (DE : AL) \times (AL : L\Theta)$ *(11).*
Consideriamo ora le coppie di triangoli simili DAE, NZB e $AL\Theta$, $\Theta N\Gamma$. Si ottengono le proporzioni:
$DE : AD = BN : ZN$ = (poiché $AD = AL$) = $DE : AL$
$AL : L\Theta = N\Gamma : N\Theta$
Sostituendo nella *(11)*: $EF : Z\Theta = (BN : ZN) \times (N\Gamma : N\Theta)$.
Quest'ultima uguaglianza si può anche scrivere:
$EF : Z\Theta = (BN \times N\Gamma) : (ZN \times N\Theta)$. *(12)*
Ma (ricordando il teorema di Euclide) $(BN \times N\Gamma) = MN^2$. La (*12*) allora diventa:
$EF : Z\Theta = MN^2 : (ZN \times N\Theta)$. *(13)*
Confrontiamo la (*13*) con il sintomo dell'iperbole, scritto nella forma *(δ)* (*Cfr. paragrafo II*). Si ha immediatamente:
$EF : Z\Theta = Z\Lambda : Z\Theta$ quindi $EF = Z\Lambda$ ***come volevasi dimostrare***.
Naturalmente, se in Fig. 7 – ceteris paribus – si cambia la lunghezza di ZN, cambia anche il punto M sull'arco dell'iperbole presa in esame. Perciò la precedente dimostrazione è valida ***per ogni punto*** *di tale curva.*
Cambiando invece il piano secante e la posizione del vertice A o l'ampiezza dell'angolo in A, cambia la curva considerata. Perciò la precedente dimostrazione è valida ***per ogni iperbole****.*

IV.

Secondo la testimonianza di Eutocio, i predecessori di Apollonio generavano la superficie conica mediante rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un suo lato. Invece Apollonio ottiene tale superficie mediante rotazione di una linea retta

(con un punto fisso) attorno a una circonferenza: egli pone per il punto fisso la sola condizione di non essere complanare alla circonferenza, e sottolinea che la retta generatrice deve essere "prolungata da ambo le parti" (***Coniche , Libro I, definizione I***).
Ciò comporta la possibilità di prendere in considerazione coni (circolari) a doppia falda, sia retti che obliqui e di ricavare da un medesimo cono (variando opportunamente l'inclinazione del piano secante) non solo i vari tipi di coniche (compresa la circonferenza) ma anche (per la prima volta) quelle che egli chiama le "sezioni opposte" (e che sono per noi i due rami della medesima iperbole) [1].
Leggiamo infatti, dal ***Libro I*** delle "***Coniche***", la ***proposizione XIV***:

Enunciazione. *Se due superfici coniche opposte al vertice sono intersecate con un piano che non passa per il vertice, su ognuna delle due superfici viene generata come sezione una iperbole.*
Le due sezioni avranno il medesimo diametro; sarà uguale per entrambe sia il parametro (lato retto) relativo alle rette condotte ordinatamente rispetto al diametro (parallele a quella che il piano secante taglia sulla base del cono), sia il lato (diametro) trasverso compreso tra i vertici delle sezioni.
Siffatte sezioni saranno chiamate (iperboli) opposte.

[1] 1 Cfr. in Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, vol. 11 (1982) fasc. 2 "Apollonio e la circonferenza" (Di Stefano, Tinti)

Rappresentazione, preparazione, dimostrazione. (*Cfr. Fig. 8*)

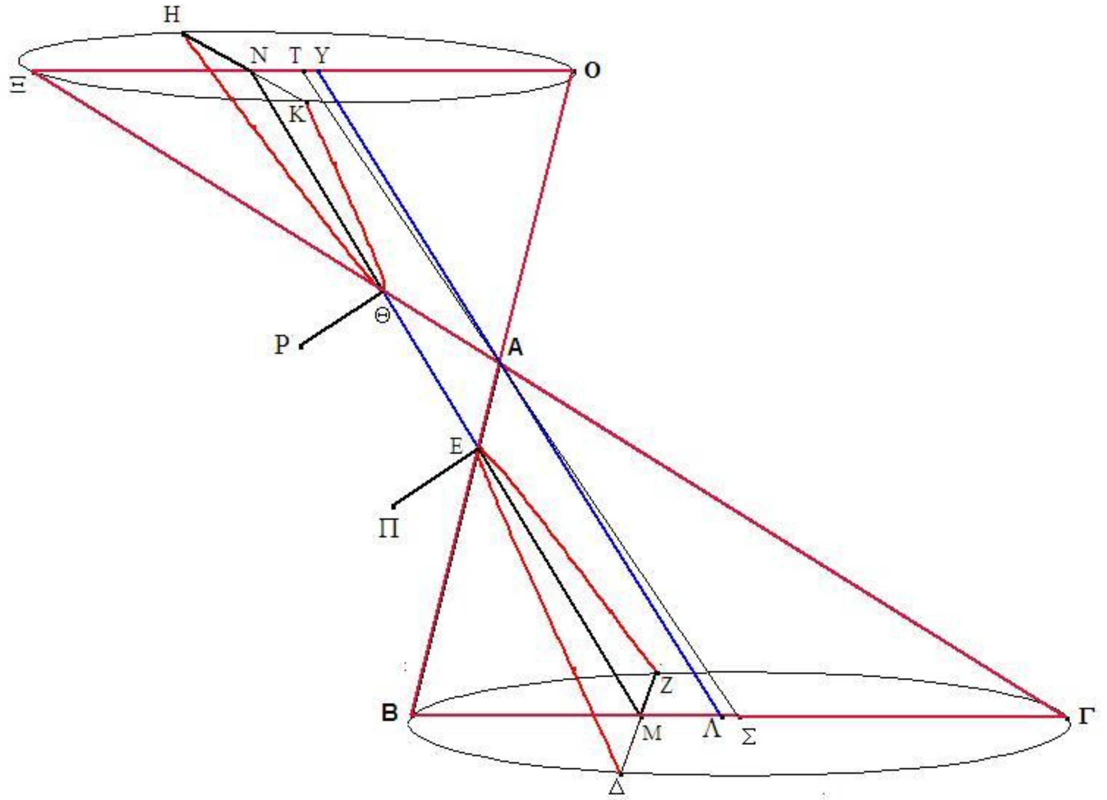


Fig. 8

Sia A il vertice comune alle superfici coniche opposte: il piano secante (non contenente il vertice) produca le sezioni ΔEZ, HΘK. Dico che ognuna delle curve sezione è una iperbole.

Sia infatti BΔΓZ il cerchio attorno alla quale si muove la retta che genera le due falde del cono; sia ΞHOK il cerchio ottenuto mediante un piano parallelo a BΛΓZ ma collocato dalla parte opposta rispetto al vertice A. Le rette ZΔ e HK, risultanti dall'intersezione tra i due cerchi e le sezioni ΔEZ, HΘK saranno dunque parallele. SiaΛ AY l'asse del cono (Λ e Y sono i centri dei cerchi BΔΓZ e ΞHOK); da Λ si conduca la retta perpendicolare a Z prolungandola fino ai punti B e Γ. Si consideri ora il piano passante per B e per l'asse del cono: esso interseca i due cerchi lungo le rette parallele ΞO, BΓ e le due superfici lungo le rette BAO,ΓAΞ. Anche ΞO sarà perpendicolare ad HK, poiché lo sono BG e ZL e ognuna di queste due è parallela ad una delle altre. Ma il piano condotto per l'asse incontra le sezioni del cono nei punti interni M ed N, dunque incontrerà anche le curve sezione nei punti Θ ed E.

Così, i punti M, E,Θ ,N appartengono sia al piano condotto per l'asse sia al piano secante: sicché MEΘN è una linea retta. E' poi chiaro che anche Ξ, Θ, A, Γ, sono allineati, e che lo stesso vale per i punti B, E, A, O: in quanto giacciono sulla superficie conica e contemporaneamente appartengono al piano per l'asse.

Mandiamo ora dai punti Θ, E le perpendicolari ΘP, $E\Pi$ alla retta ΘE; dal punto A la retta $\Sigma\Lambda T$ parallela alla retta $ME\Theta N$. Sia:

$$\Theta E : E\Pi = A\Sigma^2 : (B\Sigma \times \Sigma\Gamma) \qquad (14)$$

$$E\Theta : \Theta P = AT^2 : (OT \times T\Xi) \qquad (15)$$

Osserviamo che il cono di vertice A avente come base il cerchio $B\Gamma$ è tagliato da un piano secante contenente l'asse che genera il triangolo $AB\Gamma$ (triangolo per l'asse); che un secondo piano secante taglia la base del cono secondo una retta ΔMZ perpendicolare a $B\Gamma$, e genera sulla superficie del cono una sezione ΔEZ; che il diametro ME di questa sezione, prolungato, incontra il lato del triangolo per l'asse in un punto situato al di sopra del vertice; che $A\Sigma$ è una retta per A tracciata parallelamente al diametro EM , e che la retta $E\Pi$ uscente da E in direzione perpendicolare ad EM soddisfa alla (14).

*Tutto questo ci assicura – in base alla **proposizione XII** (cfr. paragrafo I) – che la sezione ΔEZ è una iperbole, che $E\Pi$ è il parametro relativo alle rette ordinatamente condotte rispetto al diametro EM, e che infine il lato (diametro) trasverso della sezione è ΘE.*

Allo stesso modo si prova – utilizzando la (15) – che anche $H\Theta K$ è una iperbole con diametro ΘN, parametro relativo alle rette ordinatamente condotte rispetto al diametro ΘN uguale a ΘP, lato (diametro) trasverso ΘE.

Io dico che è $\Theta P = E\Pi$.

Infatti, (cfr. sempre Fig. 7) essendo e rette parallele, possiamo scrivere le proporzioni:

$$A\Sigma : \Sigma\Gamma = AT : T\Xi, \qquad A\Sigma : \Sigma B = AT : TO.$$

Ma poiché

$$(A\Sigma : \Sigma\Gamma) \times (A\Sigma : \Sigma B) = A\Sigma^2 : (B\Sigma \times \Sigma\Gamma) \qquad e$$

$$(AT : T\Xi) \times (AT : TO) = AT^2 : (OT \times T\Xi)$$

sarà anche

$$A\Sigma^2 : (B\Sigma \times \Sigma\Gamma) = AT^2 : (OT \times T\Xi)$$

Questo risultato ci dice che sono uguali i secondi membri delle (14) e (15). Allora sono uguali anche i primi membri:

$\Theta E : E\Pi = E\Theta : \Theta P$, *cioè* $E\Pi = \Theta P$, *come volevasi dimostrare.*

(*Osservazione*: nel leggere le dimostrazioni di Apollonio – e di altri autori dell'epoca classica – si tenga presente che le "rette" (i segmenti di retta) non sono mai orientati. Quindi $AB = BA$, ecc. Per noi in qualche caso non è così, perché utilizziamo numeri negativi).

Nota. Per la costruzione di Fig. 2 e Fig. 3 occorre conoscere il lato retto (parametro) della iperbole. Lo si può ottenere nel modo che ora spieghiamo.
Si ricavano, dal triangolo per l'asse relativo al cono utilizzato, i segmenti che appaiono nella proporzione
$(KA \times KA) : (BK \times K\Gamma) = Z\Theta : Z\Lambda$ **(*)** che – come sappiamo – è la definizione del lato retto di una iperbole). Questi segmenti sono rappresentati in Fig. 9a.

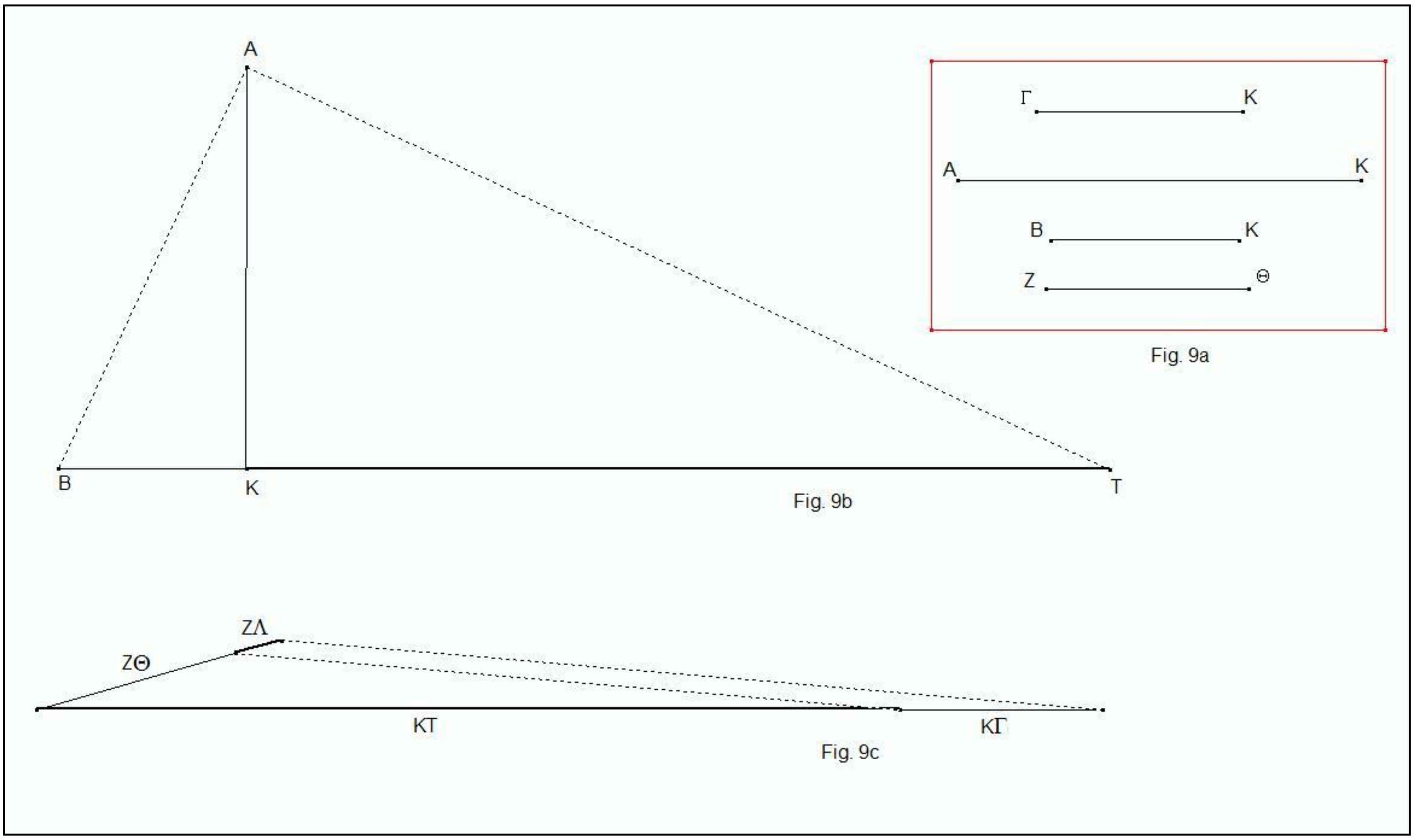


Fig. 9a
Fig. 9b
Fig. 9c

Ci si procura inoltre, con la costruzione di Fig. 9b (usando il solito teorema di Euclide), un rettangolo $BK \times KT$ equivalente al quadrato di lato KA. La (*).si può allora scrivere:
$(BK \times KT) : (BK \times K\Gamma) = Z\Theta : Z\Lambda$, cioè $KT : K\Gamma = Z\Theta : Z\Lambda$.
Quest'ultima proporzione permette di ricavare il lato retto $Z\Lambda$. (ad esempio col procedimento indicato in Fig. 9c).
Avvertiamo che $K\Gamma, AK, BK, Z\Theta, Z\Lambda$. possono avere nelle Fig. 2 e 3 lunghezze diverse da quelle (reali) di Fig. 9a: infatti le Fig. 2 e 3 sono state eseguite con le regole della prospettiva (le quali generano cambiamenti di forma e dimensione negli oggetti reali).

La scelta di usare le regole della prospettiva è stata fatta perché anche Apollonio (pur non conoscendo tali regole) nelle figure del suo trattato cerca di raffigurare sul piano le situazioni tridimensionali che prende in considerazione.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, dicembre 2009