Prima serie

Sezioni piane del cono

Fascicolo *N° 2*

LA PARABOLA NEL TRATTATO DI APOLLONIO DA PERGA
DEDUZIONE DEL SINTOMO

Apollonio visse e studiò ad Alessandria tra il 262 e il 190 a. C. La sua opera più importante è dedicata alle sezioni coniche. Degli otto libri da cui era composta, ci sono pervenuti i primi quattro (conservati in manoscritti greci del XII e XIII secolo) e i tre successivi (in una traduzione araba del 1290). L'ottavo libro è perduto: Halley ne fece una ricostruzione (sulla base delle indicazioni fornite da Pappo) nel XVIII secolo. Apollonio fu il primo a fondare la teoria di tutte e tre le coniche (per le quali introdusse i termini di ***ellisse, parabola, iperbole***) sulle sezioni di un ***unico cono circolare,*** retto o obliquo (completo, a due falde). Si ha una ***parabola*** quando il piano secante è parallelo a una generatrice del cono, altrimenti si ottengono ***ellissi*** o ***iperboli***.
"Uno dei motivi presumibili – citiamo da ***M. Kline "Storia del pensiero matematico", Einaudi, TO, 1991*** – per cui Menecmo e gli altri predecessori usavano sezioni perpendicolari a una delle generatrici dei tre tipi di coni circolari retti non è che essi non vedessero che si possono fare altre sezioni di questi coni, bensì che essi volevano trattare il problema inverso. Data una curva che abbia le stesse proprietà geometriche di una sezione conica, la dimostrazione del fatto che essa può essere ottenuta come sezione di un cono è più facile quando il piano della sezione è perpendicolare a una generatrice del cono".

Nelle prime pagine del ***Libro I*** delle "***Coniche***" di Apollonio sono contenute alcune definizioni e proprietà, che qui brevemente elenchiamo.

Si consiglia di accompagnare la lettura con un accurato esame del ***modello fisico*** oppure con la esplorazione del file interattivo "***Apollonio: parabola***", dal quale è stata estratta la Fig. 1.

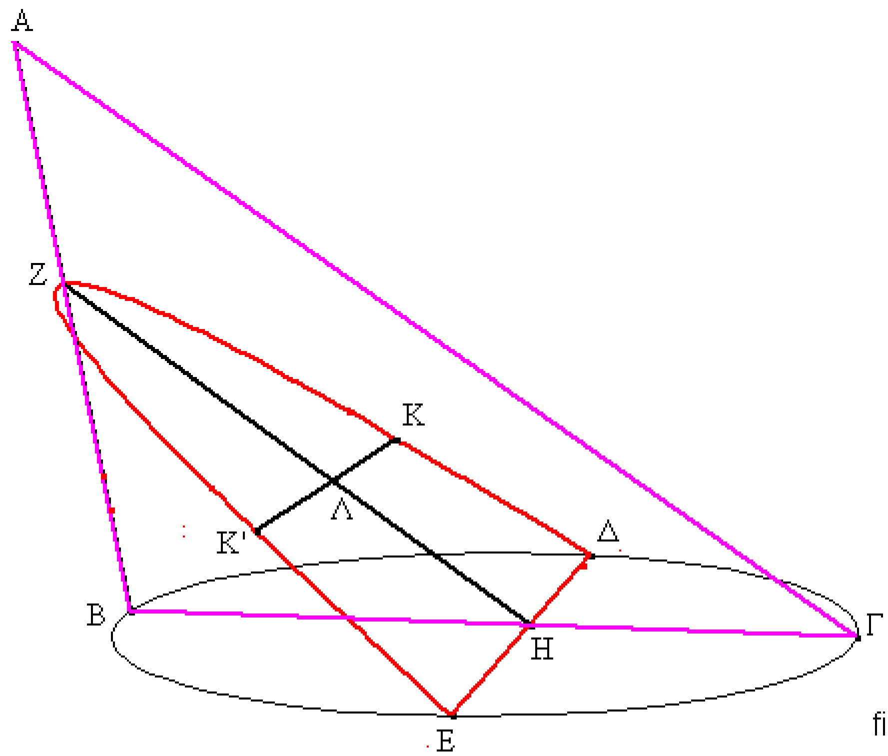


fig.1

Dati un cerchio $B\Gamma$ e un punto A esterno al piano del cerchio (cfr. Fig. 1), una retta per A che si muova lungo la circonferenza del cerchio genera un cono (doppio). Il cerchio viene detto base del cono. Asse del cono è la retta che unisce A al centro del cerchio (non rappresentata in figura). Se questa retta è perpendicolare alla base, il cono viene detto circolare retto; in caso contrario, scaleno o obliquo. Una sezione del cono mediante un piano (nel caso illustrato in Fig. 1 parallelo a una generatrice) taglia il piano della base in una retta ΔE. Se si considera il diametro $B\Gamma$ del cerchio base perpendicolare a ΔE, allora $AB\Gamma$ è un triangolo (***triangolo assiale***) nel cui interno giace l'asse del cono. Sia ZH la retta determinata dall'incontro tra il piano della sezione conica e quello del triangolo assiale: ZH non è necessariamente un asse della sezione conica, e non è necessariamente perpendicolare a ΔE se il cono è scaleno. (Si ha perpendicolarità tra ZH e ΔE solo se il cono è retto oppure quando il piano di $AB\Gamma$ è perpendicolare alla base di un cono scaleno). Sia poi KK' una qualsiasi corda della conica parallela a ΔE (e quindi non necessariamente perpendicolare a ZH). Apollonio prova allora che KK' è bisecata da ZH in Λ, sicché ΛK è la metà di KK'. (ZH è in ogni caso un ***diametro*** della sezione). Inoltre, Apollonio dimostra (prop. XVII del Libro I) che la retta tangente alla sezione conica in Z è parallela alle corde KK' (le quali si dicono ***ordinatamente condotte*** rispetto al diametro ZH)

Traduciamo ora, dal ***Libro I*** del trattato di Apollonio (utilizzando l'edizione ***Heiberg*** del 1891) le pagine dedicate alla ***proposizione XI***.
La traduzione (letterale) sarà scritta in caratteri corsivi.
Leggendo, appariranno subito alcune caratteristiche strutturali e stilistiche comuni alle opere matematiche greche (soprattutto se di provenienza alessandrina)[1]. Ad esempio, la trattazione delle singole proposizioni (non solo quella della prop. XI) si articola sempre in cinque parti: enunciazione, rappresentazione, preparazione, dimostrazione, conclusione (le metteremo in evidenza con un breve commento).

Prop. XI

"*Dato un cono, tagliamolo con due piani: uno passante per l'asse, l'altro che intersechi la base del cono lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo per l'asse; inoltre il diametro della sezione generata da questo secondo piano sia parallelo ad uno dei lati del triangolo per l'asse. Allora qualunque retta condotta (parallelamente alla intersezione comune tra il piano secante e la base del cono) da un punto della sezione conica a un punto del suo diametro, genera un quadrato equivalente al rettangolo formato dalla retta compresa tra questo punto del diametro e il vertice della sezione, e da un'altra retta il cui rapporto con quella compresa tra il vertice del cono e il vertice della sezione sia uguale al rapporto tra il quadrato avente per lato la base del triangolo per l'asse e il rettangolo individuato dagli altri due lati del medesimo triangolo".*

Questa prima parte è la ***protasis*** o ***enunciazione***: in essa non compare alcun disegno illustrativo; gli oggetti geometrici che intervengono nell'enunciato (punti, rette, circonferenze ecc) sono sempre descritti a parole, mai indicati con lettere o simboli. Si ricordi poi che il termine ***retta***, nella geometria della antica Grecia, indica sempre una figura limitata, corrispondente a quella che noi chiamiamo ***segmento***).

[1] Alcuni hanno perciò attribuito agli autori di tali opere l'uso di un "formalismo in linguaggio naturale". Cfr. F. Acerbi "Una scuola matematica alessandrina?", in "La Matematica: i luoghi e i tempi", Einaudi, 2007.

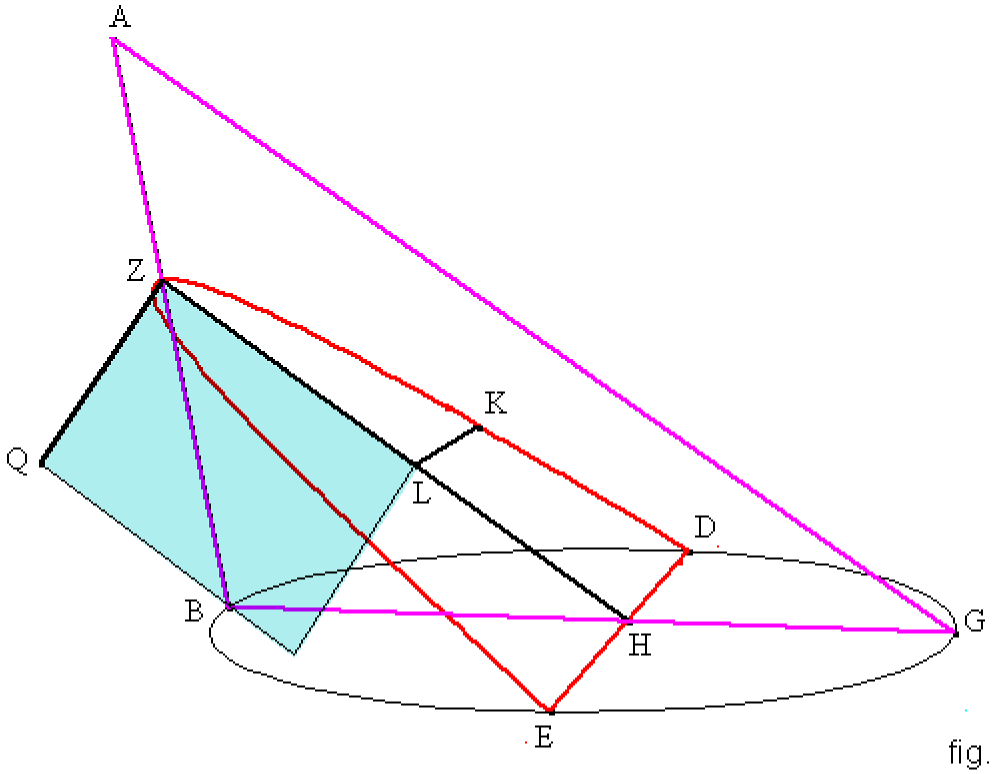


fig.2

"Il cono (Fig. 2 e anche file interattivo Lato retto) abbia vertice nel punto A; *la base sia il cerchio* $B\Gamma$; *il piano secante contenente l'asse genera il triangolo* $AB\Gamma$; *il secondo piano secante taglia la base del cono lungo la retta* ΔE *perpendicolare a* $B\Gamma$, *e la superficie del cono lungo una curva* ΔZE *avente il diametro* ZH *parallelo al lato* $A\Gamma$ *del triangolo per l'asse. Dal punto* Z *tracciamo* $Z\Theta$ *in direzione perpendicolare a* ZH, *in modo che sia* $(B\Gamma\times B\Gamma):(BA\times A\Gamma)=Z\Theta:ZA$ *(*). Si prenda sulla sezione un punto* K: *tracciata per* K *la parallela* $K\Lambda$ *alla retta* ΔE, *dico che è:* $K\Lambda\times K\Lambda = Z\Theta\times Z\Lambda$ *(1)".*

Questa seconda parte è la ***ecthesis*** o ***rappresentazione***: viene esibito e illustrato (con uso sistematico di lettere e figure) un caso ***specifico***, che però rappresenta allo stesso tempo se stesso e tutti gli altri casi possibili, ed è dunque anche ***generale*** [2] (le relazioni spaziali sono determinate ma non misurate). A questo modo di procedere fa riferimento esplicito Kant quando afferma che la matematica è basata sull'uso di esemplificazioni particolari di concetti generali. Ricordiamo che $Z\Theta$, definito dalla (*), è il ***lato retto*** (o ***parametro***) della curva sezione

[2] Cfr. S. Cuomo "L'età classica ed ellenistica", in "La Matematica: i luoghi e i tempi", Einaudi, 2007.

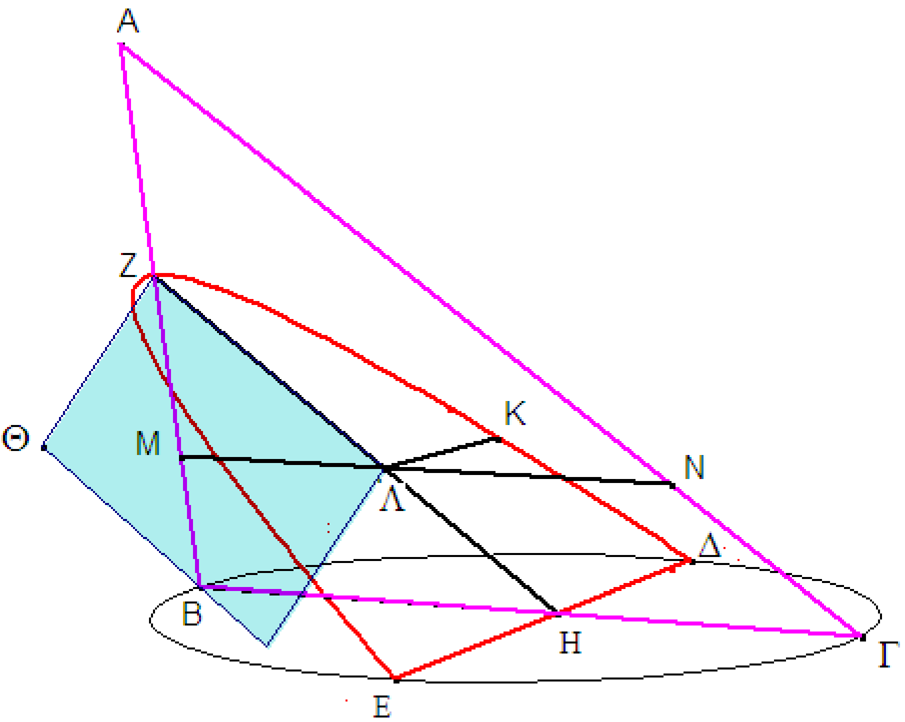


Fig. 3

"Si costruisca (Fig. 3) MN, *parallela condotta per* Λ *alla retta* $B\Gamma$ *"*

Questa terza parte è la ***cataschueè*** o ***preparazione*** (macchinario): si tratta di una costruzione (può essere più o meno complessa: in questo caso è semplicissima) consistente nell'aggiungere alla figura che illustra la rappresentazione alcuni altri elementi (rette, triangoli, ecc.) utili per sviluppare il ragionamento successivo.

"Poiché $K\Lambda$ *è parallela a* ΔE, *il piano individuato dalle rette* $K\Lambda$, MN *è parallelo a quello individuato dalle rette* $B\Gamma, \Delta E$ (*Euclide*, $XI, 15$) *cioè alla base del cono (cfr. Fig. 3). Perciò il piano delle rette* $K\Lambda$, MN *è un cerchio, avente* MN *come diametro.*
Inoltre $B\Gamma$, ΔE *sono perpendicolari, quindi lo sono anche* $K\Lambda$, MN (*Euclide*, $XI, 10$)*:*
perciò $M\Lambda \times \Lambda N = K\Lambda \times K\Lambda$ **(2)**.
E' facile verificare l'uguaglianza: $(B\Gamma \times B\Gamma) : (BA \times A\Gamma) = (B\Gamma : A\Gamma) \times (B\Gamma : BA)$*; dalla* (*) *allora si ricava:* $(B\Gamma : A\Gamma) \times (B\Gamma : BA) = \Theta Z : ZA$ **(3)**
Ma per la similitudine dei triangoli $BA\Gamma$, MAN *e* $M\Lambda Z$ *si ottiene*
$B\Gamma : A\Gamma = MN : NA = M\Lambda : \Lambda Z$ *(Euclide, VI, 4), e anche:*
$B\Gamma : BA = MN : MA = M\Lambda : MZ =$ *(Euclide, VI, 2)* $= N\Lambda : ZA$.
Confrontando con la (**3**)*:*
$\Theta Z : ZA = (M\Lambda : \Lambda Z) \times (N\Lambda : ZA)$*. Quest'ultima si può anche scrivere:*
$\Theta Z : ZA = (M\Lambda \times \Lambda N) : (Z\Lambda \times ZA)$ **(4)**

Poiché si ha $\Theta Z{:}ZA = (\Theta Z\times Z\Lambda){:}(Z\Lambda\times ZA)$, *sostituendo in* (**4**):
$(M\Lambda\times \Lambda N){:}(Z\Lambda\times ZA)=(\Theta Z\times Z\Lambda){:}(Z\Lambda\times ZA)$, *cioè (Euclide, V, 9)*
$(M\Lambda\times \Lambda N)=(\Theta Z\times Z\Lambda)$. *Infine, ricordando la* (**2**):
$K\Lambda\times K\Lambda= \Theta Z\times Z\Lambda$ (**1**)"

Questa quarta parte è la ***apodeixis*** o ***dimostrazione***: deduzione della tesi, svolta appoggiandosi a definizioni e proposizioni già note o dimostrate.

*"Ogni sezione che verifica la (**1**) sarà chiamata **parabola**; la retta ΘZ si chiamerà invece **parametro** delle rette ordinatamente condotte al diametro ZH, oppure **lato retto**".*

Quinta e ultima parte: è la ***riaffermazione*** o ***conclusione***, con la quale si indica (spesso in modo implicito o allusivo) che il caso generale viene raggiunto attraverso la iterazione di dimostrazioni particolari, così come l'infinito viene sempre raggiunto e trattato attraverso il finito.
Si ricordi che la rappresentazione di Fig. 2 può esser costruita in infiniti modi diversi: senza cambiare la conica, spostando il punto K; oppure cambiando il cono o il piano secante, e quindi la conica considerata.
Notiamo infine che la (1) può esser letta così:
"il quadrato di lato $K\Lambda$, applicato ***in modo parabolico*** al lato ΘZ, dà origine a un rettangolo di lato $Z\Lambda$" (cfr. ***Euclide, libro sesto della Geometria***).
Oppure, usando il linguaggio contemporaneo:
"fissato un diametro della parabola, il quadrato dell'ordinata $K\Lambda$ condotta da un punto K della curva in direzione coniugata al diametro è equivalente al rettangolo avente come lati il parametro ΘZ e la distanza $Z\Lambda$ tra l'origine del diametro e il punto Λ in cui l'ordinata interseca il diametro (ascissa del punto K)".

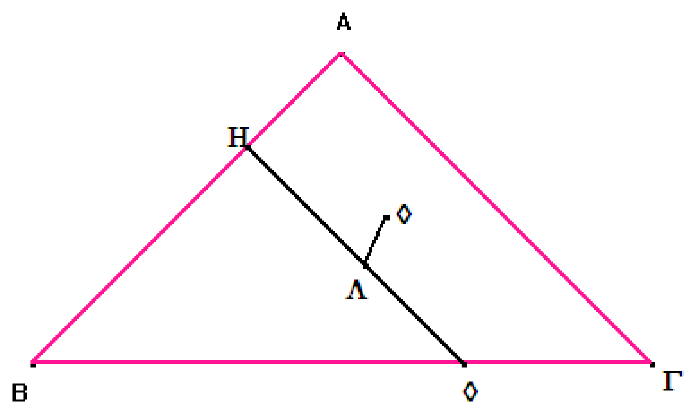


fig.4

Nella ***proposizione XI*** che abbiamo appena letto, se il cono preso in esame è obliquo (scaleno), le rette $K\Lambda$ e $Z\Lambda$ non saranno, in generale, perpendicolari. Ma il teorema risulta valido anche se il cono (come nella teoria di Menecmo) è retto e rettangolo. Quando ciò accade $K\Lambda$ e $Z\Lambda$ sono

perpendicolari, il triangolo per l'asse è rettangolo isoscele (Fig. 4), e – come si sa – risulta allora $B\Gamma = \sqrt{2} \cdot BA = \sqrt{2} \cdot A\Gamma$.
La (*) diventa:
$(2BA\times A\Gamma):(BA\times A\Gamma) = \Theta Z:ZA$, cioè $\Theta Z = 2\ ZA$ (**)
La (*1*) allora si scrive:
$K\Lambda\times K\Lambda = 2Z A\times Z\Lambda$, che già conosciamo come ***sintomo di Menecmo***.
La teoria di Apollonio generalizza dunque quella di Menecmo, cioè la contiene come caso particolare.
La (**) mette in evidenza che, se sono valide le ***ipotesi di Menecmo***, il ***lato retto*** (***parametro***) ΘZ della parabola acquista un significato geometrico intuitivo (doppio del segmento che ha come estremi il vertice del cono e il vertice della sezione, oppure doppio del segmento che ha come estremi i punti in cui il piano secante incontra rispettivamente lato e altezza del triangolo per l'asse). La nostra immaginazione può dunque "vederlo", collocandolo sul piano secante oppure sulla superficie del cono che ha generato la sezione.
La definizione –espressa dalla proporzione (*) – che Apollonio dà del lato retto ΘZ non ha questo pregio intuitivo: appare alquanto artificiosa (è stata infatti, molto probabilmente, suggerita dall'analisi delle relazioni emerse durante la ricerca del sintomo).

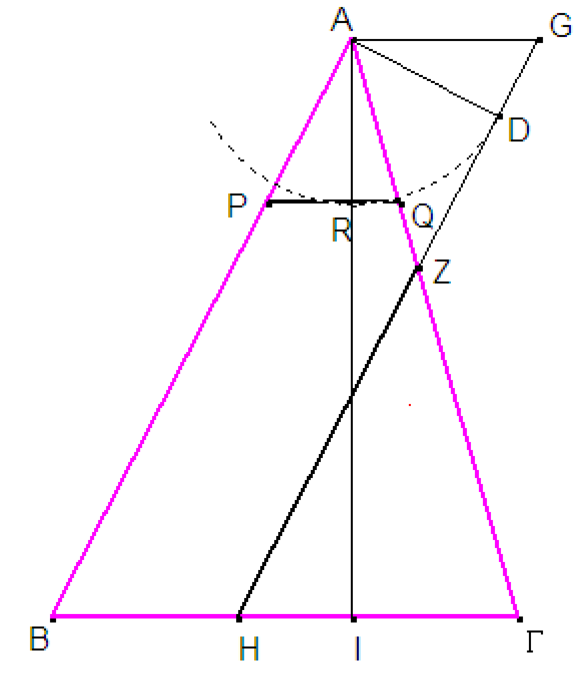


fig.5

Tuttavia, nella seconda metà del '600, quando molti studiosi avevano concentrato la loro attenzione sull'opera di Apollonio, riprendendo alcuni dei suoi punti di vista, questo "***difetto***" fu eliminato. In un articolo del 1689, J. Bernoulli[3] fornì infatti una interpretazione "spaziale" particolarmente semplice – e, come vedremo in seguito (cfr. ***Fascicoli N° 3 e 4***), assolutamente generale – del lato retto di una conica.
La illustriamo qui ***nel caso della parabola***.
Dato un cono e un piano secante che (rispettando le ipotesi della proposizione XI di Apollonio precedentemente esaminata) lo tagli in modo da generare una parabola, sia (cfr. Fig. 5) $AB\Gamma$ il triangolo per l'asse, AI l'altezza del triangolo, ZH (parallelo ad AB), il diametro della parabola.

[3] Cfr. J. Bernoulli, "Acta Eruditorum" 1689, pag. 586

Rimanendo nel piano del triangolo per l'asse, eseguiamo la seguente costruzione: da A si mandi la perpendicolare alla retta ZH (fino ad incontrarla nel punto D) e la parallela alla retta $B\Gamma$ (ottenendo G come punto di intersezione con ZH). La circonferenza di centro A e raggio AD intersechi in R l'altezza AI. Si tracci poi la parallela a $B\Gamma$ passante per R, incontrando in P e Q i lati del triangolo per l'asse. Bernoulli afferma che PQ è il ***lato retto*** della parabola.

Dimostrazione: Nel piano del triangolo per l'asse, consideriamo i triangoli simili $ZH\Gamma$ e APQ; si ricava: $ZH : H\Gamma = AP : PQ$ (*).
Dai triangoli uguali APR e AGD si ottiene invece: $AP = AG = BH$ ($AGBH$ è infatti un parallelogramma). Allora la (*) si può riscrivere come segue:
$ZH : H\Gamma = BH : PQ$, cioè: $ZH \times PQ = BH \times H\Gamma$ (**)
Torniamo adesso nello spazio tridimensionale. La Fig. 6 ci mostra (oltre al triangolo per l'asse e al segmento PQ ottenuto con la precedente costruzione): la base circolare del cono, la parabola generata sul cono dal piano secante, il diametro ZH della parabola, l'intersezione ΔE tra il piano secante e la base del cono. Concentriamo la nostra attenzione sul punto E.

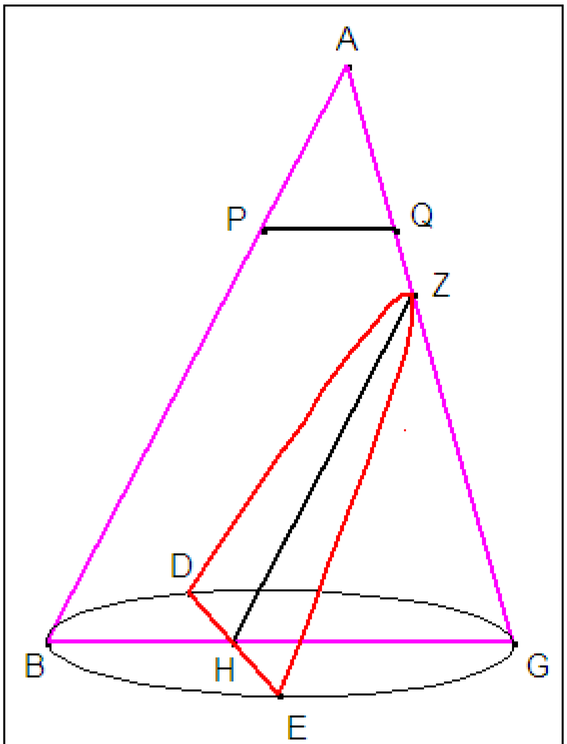
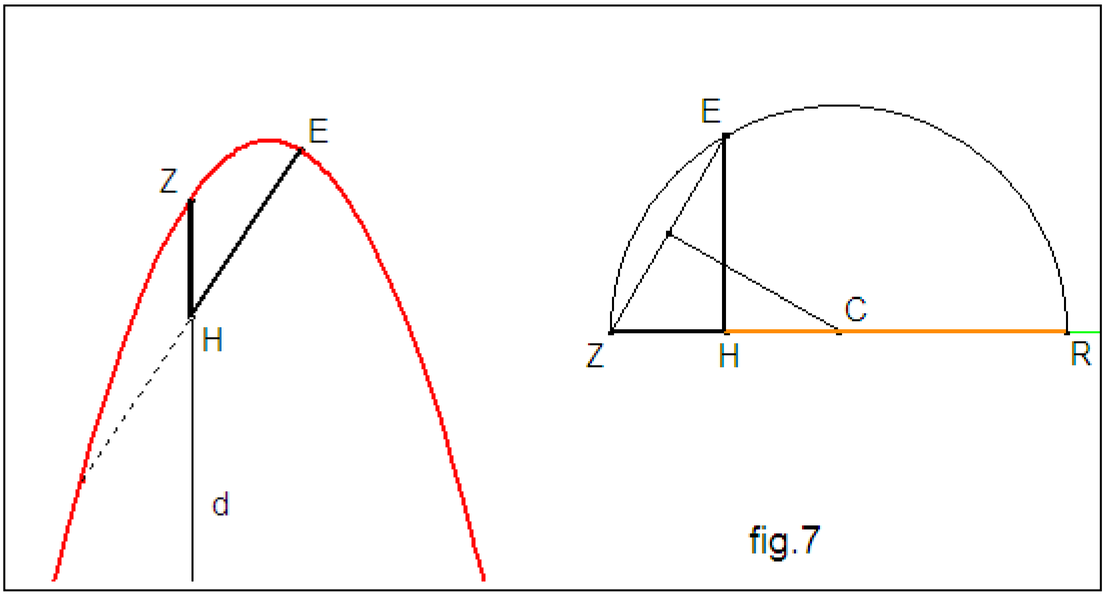


fig.6

Poiché E appartiene alla circonferenza, e poiché per ipotesi EH è perpendicolare a B⍰, possiamo scrivere (applicando il teorema di Euclide) $EH \times EH = BH \times H\Gamma$; ma poiché E appartiene anche alla parabola, vale la (1) (teorema XI di Apollonio), quindi: $EH \times EH = \Theta Z \times ZH$ (dove ΘZ è il ***lato retto*** della nostra parabola). Dalle due ultime uguaglianze scritte si ricava allora $BH \times H\Gamma = \Theta Z \times ZH$ (***); confrontando (**) e (***) abbiamo infine $\Theta Z = PQ$, c.v.d.
In questo modo il lato retto ΘZ di una parabola viene legato intuitivamente al cono che sostiene la curva, e si può costruire con riga e compasso (come si è visto) nel piano del triangolo per l'asse.
Si può anche notare che se viene assegnata nel piano una curva della quale si sa con certezza che si tratta di una parabola – e che quindi vale la (1) – il lato retto ΘZ si può facilmente ricavare (nel piano stesso della curva) con riga e compasso.



La costruzione è indicata in Fig. 7: data la parabola, si sceglie un suo diametro Zd; preso poi un punto E della curva, si traccia, in direzione coniugata al diametro (parallela quindi alla tangente in Z), la ordinata EH.
Dopo aver collocato nel piano i segmenti ZH ed EH in modo da formare un angolo retto di vertice H, si traccia l'asse del segmento ZE, che incontra in C la retta ZH. La circonferenza di centro C e raggio ZC incontri in R la retta ZH. Il lato retto (parametro) della curva (relativo al diametro prescelto) è rappresentato dal segmento HR (in virtù del solito teorema di Euclide).

Queste ultime osservazioni ci servono per attirare l'attenzione sul fatto che in Apollonio (come anche in Euclide) riga e compasso (scelti per la loro elevata semplicità e precisione) vengono assunti come strumenti fondamentali di calcolo. La geometria di questi autori può essere considerata un modello matematico di particolari attività umane (quelle che servono alla progettazione ed esecuzione di un disegno), e la costruibilità con riga e compasso è condizione essenziale di esistenza per le figure geometriche. (Nella tradizione ellenico platonica, che i teorici alessandrini tendono ad abbandonare – ma alla quale è ancora legato, per es., Menecmo – gli enti matematici invece sono "dati", e occorre scoprirne il ***logos*** nascosto).
Perciò Apollonio, come condizione preliminare a una teoria geometrica delle coniche, si garantisce la possibilità di prelevarle dal cono su cui giacciono e di ridisegnarle su un piano qualsiasi con riga e compasso (quindi, punto dopo punto, non "per moto continuo").
A ciò provvedono i sintomi: da un lato servono a caratterizzare e riconoscere la conica, dall'altro (permettendo di costruire con riga e compasso ogni punto della

curva a partire da grandezze note, sufficienti a individuarla) ne qualificano la natura di oggetto sottoponibile a calcolo (dotato quindi di esistenza in senso matematico).
I sintomi permettono dunque ad Apollonio di ridurre le coniche da “***luoghi solidi***” a “***luoghi piani***”: se ne possono ricavare proprietà ulteriori attraverso uno studio planimetrico, senza più fare riferimento al cono.
Possiamo dire che Apollonio scrive il suo trattato sulle coniche tenendo costantemente a portata di mano riga e compasso: strumenti con cui può essere illustrato mediante costruzioni ogni risultato ottenuto nella ricerca. Tuttavia, egli non indica sempre tali costruzioni, che sono invece esplicitate da studiosi successivi. Nel caso della parabola ad esempio, quando siano noti l’asse e il parametro (lato retto) relativo all’asse (quando cioè il sintomo sia assegnato nelle ipotesi di Menecmo, oppure quando il piano secante sia perpendicolare al triangolo per l’asse: in tali ipotesi la tangente in Z alla parabola è perpendicolare all’asse della curva), una costruzione per punti con riga e compasso venne indicata da J. Werner[4].

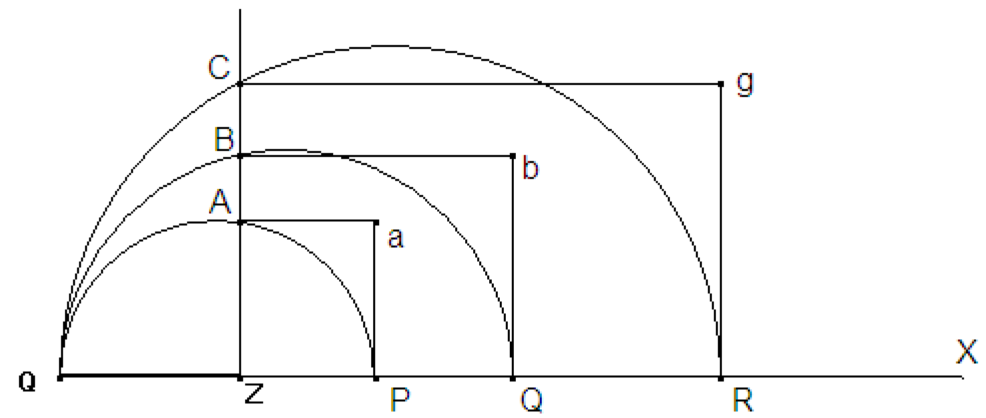


fig.8

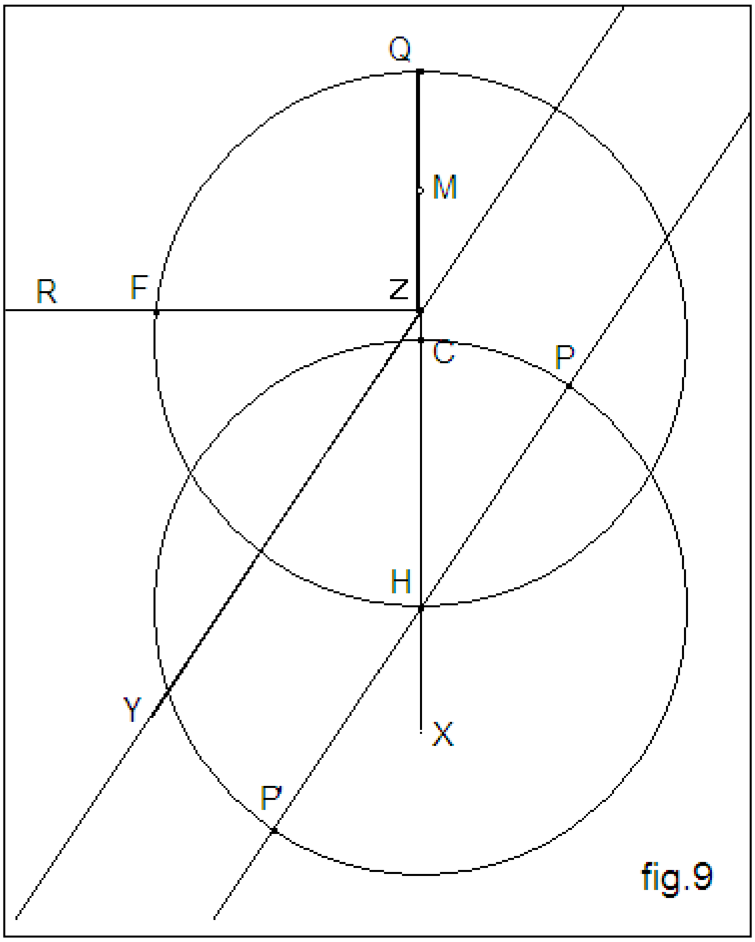
Sia (Fig. 8) ΘZ il lato retto, ZX (semiretta) l’asse della parabola.
Si costruisca col compasso una serie di semicirconferenze tangenti fra loro nel punto Θ e aventi diametri (crescenti) ΘP, ΘQ, ΘR, ecc. Si tracci poi da Z la perpendicolare a ZX, (perpendicolare che coincide con la tangente alla parabola nel vertice Z), la quale incontrerà le semicirconferenze nei punti A, B, C, ecc. Da P si tracci una retta perpendicolare a ZX; da A una retta parallela a ZX: sia α il punto di intersezione fra queste due rette. Operando in modo analogo con la coppia di punti Q, B si

[4] Werner Johannes (1468-1528): Libellus Johanni Verneri Nuremburgensis super vigintiduobus elementis conicis, Nuremberg, 1522.

ottiene come intersezione β, mentre dalla coppia R,C si ottiene γ, ecc. (esplorare anche, il file ***Costruzione di Werner: parabola***)
Si dimostra facilmente che i punti α, β, γ, ecc. appartengono alla parabola inizialmente assegnata mediante asse e lato retto. Risulta infatti, per un noto teorema di Euclide:

$$(P\alpha)^2 = \Theta Z \times ZP\,, \quad (Q\beta)^2 = \Theta Z \times ZQ\,, \quad (R\gamma)^2 = \Theta Z \times ZR\,, \text{ ecc.}$$

Supponiamo invece che siano noti un diametro della parabola e il lato retto relativo a tale diametro (il sintomo è quindi assegnato nelle ipotesi di Apollonio: ordinate oblique rispetto al diametro). In questo caso, la costruzione per punti della curva con riga e compasso è descritta nel trattato sulle coniche di de L'Hospital5



Sia (Fig. 9) ΘZ il lato retto, ZX (semiretta) il diametro della parabola, ZY la tangente alla parabola nel vertice del diametro. Dopo aver tracciato ZR (perpendicolare al diametro ZX), si determini M, punto medio di ΘZ; poi, scelto un punto qualsiasi C sulla semiretta MX, si descriva la circonferenza di centro C e raggio $C\Theta$, che interseca ZR nel punto F e ZX nel punto H.
Disegniamo ora la circonferenza di centro H e raggio ZF: siano P e P' le sue intersezioni con la parallela a ZY passante per H.
Anche in questo caso si dimostra subito che i punti P e P' appartengono alla parabola inizialmente assegnata mediante diametro, lato retto relativo a tale diametro, tangente nel vertice del diametro.
Infatti, per il solito teorema di Euclide (essendo $HP = ZF$) si ricava:
$(HP)^2 = \Theta Z \times ZH$. (Si esplori anche, , il file interattivo ***Costruzione di De l'Hospital***: parabola)

---

[5] G.A.F.de L'Hospital (1661-1704): Traité des Sections Coniques, Paris (1696)

<u>Nota</u>. Per la costruzione di Fig. 2 e Fig. 3 occorre conoscere il lato retto (parametro) della parabola. Lo si può ottenere nel modo che ora spieghiamo.

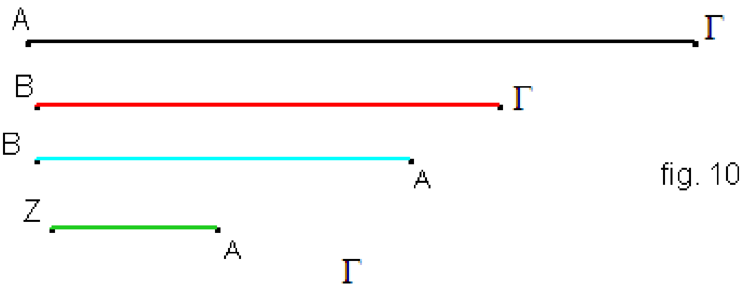


fig. 10a

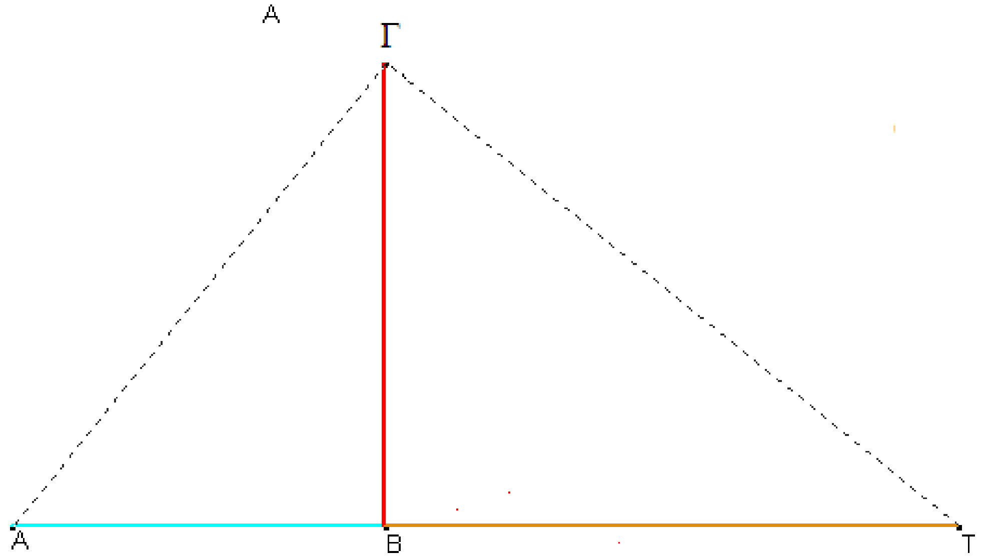


fig. 10b

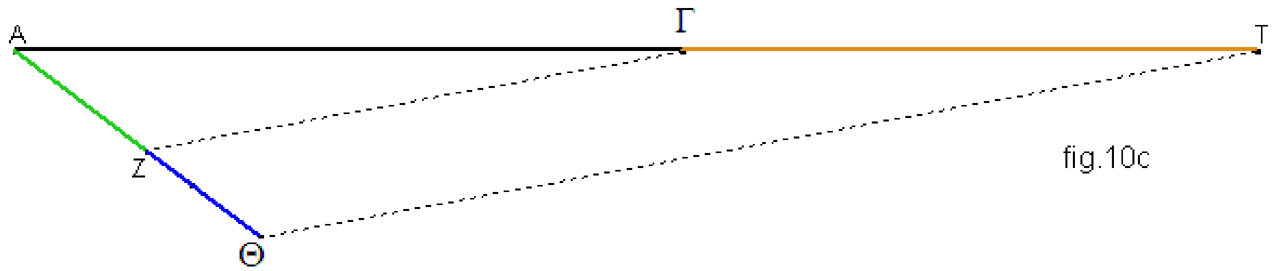


fig.10c

Si ricavano, dal triangolo per l'asse relativo al cono utilizzato, i segmenti che appaiono nella proporzione
$(B\Gamma \times B\Gamma) : (BA \times A\Gamma) = Z\Theta : ZA$ ***(*)*** (che – come sappiamo – è la definizione del lato retto di una parabola). Questi segmenti sono rappresentati in Fig. **10a**.
Ci si procura inoltre, con la costruzione di Fig. **10b** (usando il solito teorema di Euclide), un rettangolo $BA \times BT$ equivalente al quadrato di lato $B\Gamma$. La ***(*)***.si può allora scrivere:
$(BA \times BT) : (BA \times A\Gamma) = Z\Theta : ZA$, cioè $BT : A\Gamma = Z\Theta : ZA$.
Quest'ultima proporzione permette di ricavare il lato retto $Z\Theta$ (ad esempio col procedimento indicato in Fig. **10c**).

Avvertiamo che $A\Gamma$, AB, $B\Gamma$, AZ, $Z\Theta$ possono avere nelle Fig. 2 e 3 lunghezze diverse da quelle (***reali***) di Fig. **10a**: infatti le Fig. 2 e 3 sono state eseguite con le regole della prospettiva (le quali generano cambiamenti di forma e dimensione negli oggetti reali).
Ovviamente, Apollonio non conosceva la nostra prospettiva: tuttavia con le figure presenti nel suo trattato egli cerca di raffigurare sul piano le situazioni tridimensionali che prende in considerazione.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, dicembre 2009