Prima serie
Sezioni piane del cono

Fascicolo *N° 1*

LE TRIADI DI MENECMO.

Dobbiamo subito avvertire che la nostra conoscenza della matematica greca (che copre un lunghissimo periodo, di quasi nove secoli) è certamente incompleta e probabilmente distorta. Poco (o nulla) sappiamo sulla biografia degli autori, meno ancora sui loro rapporti. La tradizione "ha privilegiato inoltre le opere sistematiche, a svantaggio di quelle di argomento più circoscritto". Alcuni testi infine (ad esempio quello di Euclide) ci sono pervenuti attraverso trascrizioni che hanno comportato interpolazioni e rimaneggiamenti. Per avere una idea dei problemi storiografici generati da questi dati di fatto, si possono leggere, nel volume *"La matematica. I luoghi e i tempi" (Einaudi, 2007, a cura di Bartocci e Odifreddi)*, gli articoli di S. Cuomo e F. Acerbi.

La teoria delle coniche, la cui scoperta è attribuita a Menecmo (discepolo di Eudosso e fratello di Dinostrato, vissuto tra il 375 e il 325 a. C.) si sviluppò nella seconda metà del IV secolo a. C.: trattati specifici (dovuti ad Aristeo ed a Euclide) comparvero solo attorno al 300 a. C.
Sul modo in cui Menecmo definiva le coniche e ricavava le loro proprietà ***non esistono fonti***. Noi ci serviremo di una ricostruzione della sua opera proposta (come altamente probabile) da E. J. Dijksterhuis in *"Archimede" (Ponte alle Grazie, FI 1989).*
"Eutocio riferisce che per coni gli antichi intendevano esclusivamente i solidi generati da un triangolo rettangolo rotante attorno ad uno dei cateti (cioè coni circolari retti); che li classificavano in coni rettangoli, ottusangoli o acutangoli a seconda del tipo di angolo formato nel vertice di una sezione meridiana completa; che infine usavano ciascuna specie di cono per generare un solo tipo di conica. Infatti, essi tagliavano ogni cono con un piano perpendicolare ad una generatrice e chiamavano le sezioni così ottenute con i nomi seguenti, da Pappo attribuiti ad Aristeo: sezione di un cono rettangolo (orthotome), sezione di un cono ottusangolo (amblytome), sezione di un cono acutangolo (oxytome). Si tratta evidentemente delle curve che da Apollonio (225 a. C.) in poi sono conosciute rispettivamente con il nome di parabola, iperbole, ellisse" (Dijksterhuis, op. cit. pag. 44)
Questo processo costruttivo forniva ai geometri dell'epoca oggetti completi e ***limitati***, ben distinti fra loro (chiamati, nel loro insieme, le ***triadi di Menecmo***). Posto di fronte ad essi, lo studioso doveva scoprirne e rivelarne la individualità, l'intima natura, il "***logos***" nascosto. Ciò si otteneva caratterizzandoli attraverso il

“***sintomo***”: una proporzione che legava i loro singoli punti al cono di appartenenza. La deduzione del sintomo (al quale veniva poi ricondotta ogni altra proprietà della curva) era fatta nello spazio a tre dimensioni: perciò alle coniche, benché giacenti sul piano secante, veniva riservata dagli antichi la qualifica di “***curve solide***”
La convinzione che le coniche (le curve in genere) possiedano una “natura” (e siano in ciò analoghe a corpi materiali) è stata abbandonata molto lentamente dai geometri al termine di un processo storico lungo e faticoso (che cercheremo di ricostruire brevemente nei fascicoli successivi) nel quale, anche attraverso concettualizzazioni di origine extramatematica, si è costituita l’identità curva-equazione.

Orthotome
deduzione del sintomo.

Nota
Si consiglia di ritrovare sul ***modello fisico*** (oppure esplorando *l’animazione* “***Menecmo: orthotome***” e confrontandolo con la Fig. 1) la giacitura dei tre piani σ, β, τ che utilizzeremo nella dimostrazione e che intersecano il cono retto e rettangolo al quale faremo riferimento. Nelle Fig. 1, 2, 3, 4 si vedono le sezioni che i tre piani determinano sul cono.

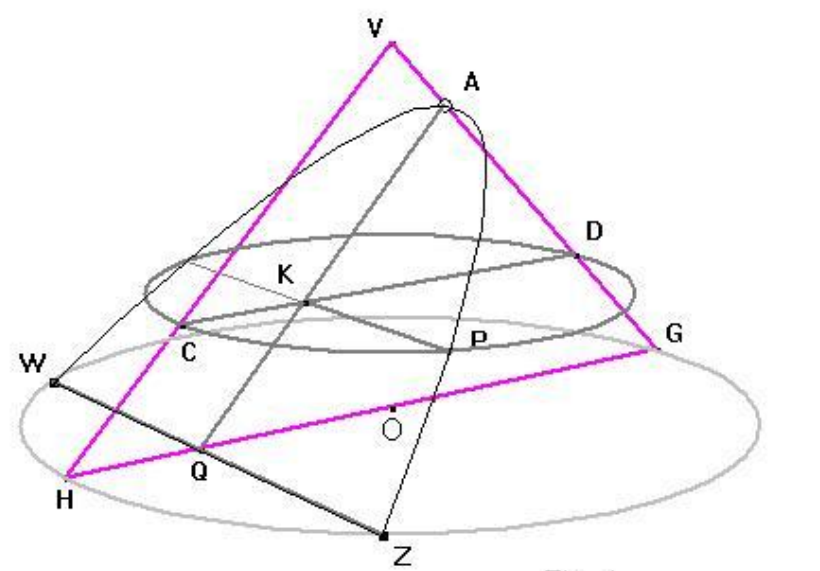


Fig. 1

In Fig. 1 sono messi in evidenza i tre piani che servono alla deduzione del sintomo. Il piano del triangolo per l'asse (τ) è individuato dai punti V, H, G; il piano secante (σ) è individuato dai punti A, W, Z; il piano (β) passante per P e parallelo alla base del cono è individuato dai punti P, D, C che appartengono alla circonferenza intersezione di tale piano col cono.

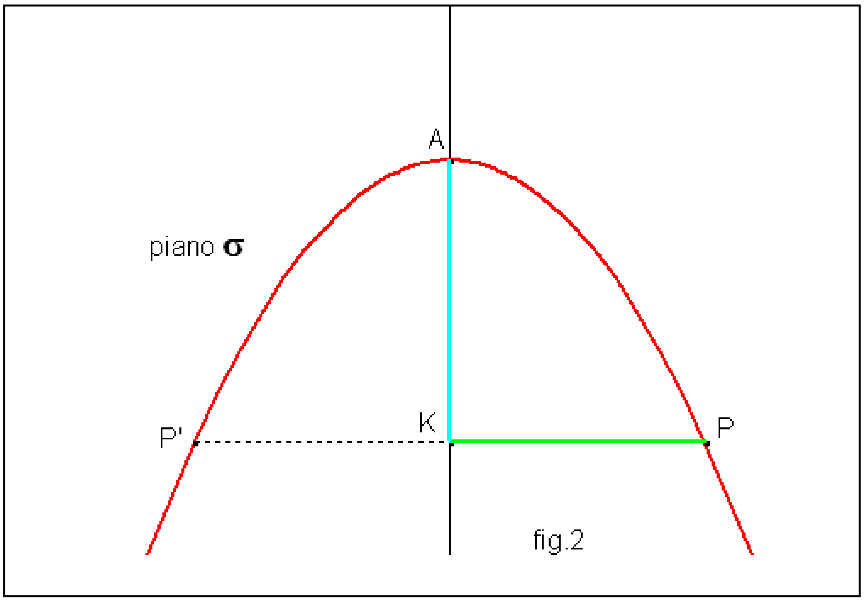


fig.2

Dato un cono circolare retto e rettangolo (ottenuto quindi per rotazione attorno ad un cateto di un triangolo rettangolo isoscele), lo si intersechi con un piano σ passante per il punto A di una generatrice (ipotenusa del triangolo generatore) e a questa perpendicolare. Si ottiene come sezione la orthotome rappresentata in Fig. 2 (il piano della figura coincide con σ): P è un punto generico della curva.

Consideriamo ora altri due piani: τ, passante per A e per l'asse del cono; β, passante per P e parallelo alla base del cono.

In Fig. 2, la retta passante per A è l'intersezione tra i piani τ e σ: si conduca, da P, la perpendicolare PK a tale retta. Dato P, restano così individuati i segmenti AK, KP: viceversa, la conoscenza di questi due segmenti permette di individuare il punto P della curva. Si noterà inoltre che, prolungando PK fino ad incontrare di nuovo la orthotome in P', risulta PK = KP' (la retta PP' è parallela alla tangente all'orthotome in A; la retta per A perpendicolare a PP' è l'asse della orthotome).

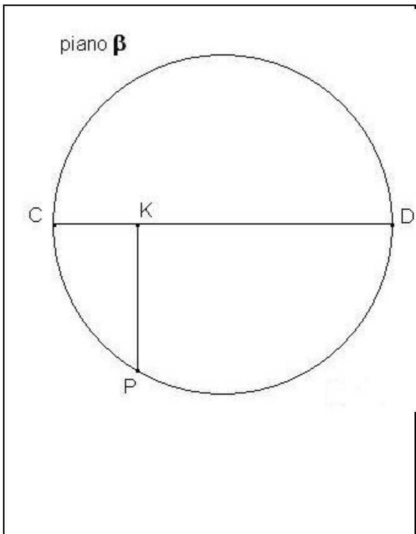


fig.3

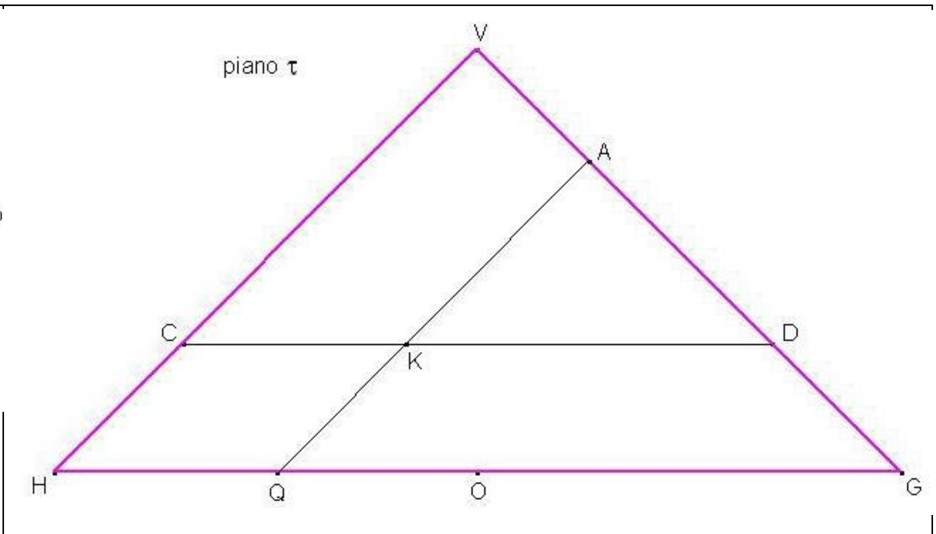


fig.4

Sul piano β (rappresentato in Fig. 3) vediamo: la circonferenza lungo la quale esso interseca il cono, e la retta CD generata dalla sua intersezione con τ. Per un noto teorema di Euclide si ricava: KC : KP =KP : DK (*).

Sul piano τ (rappresentato in Fig. 4) vediamo invece il triangolo VHG (triangolo per l'asse) che esso genera intersecando il cono, mentre AQ è la sua intersezione con σ e CD quella con β.

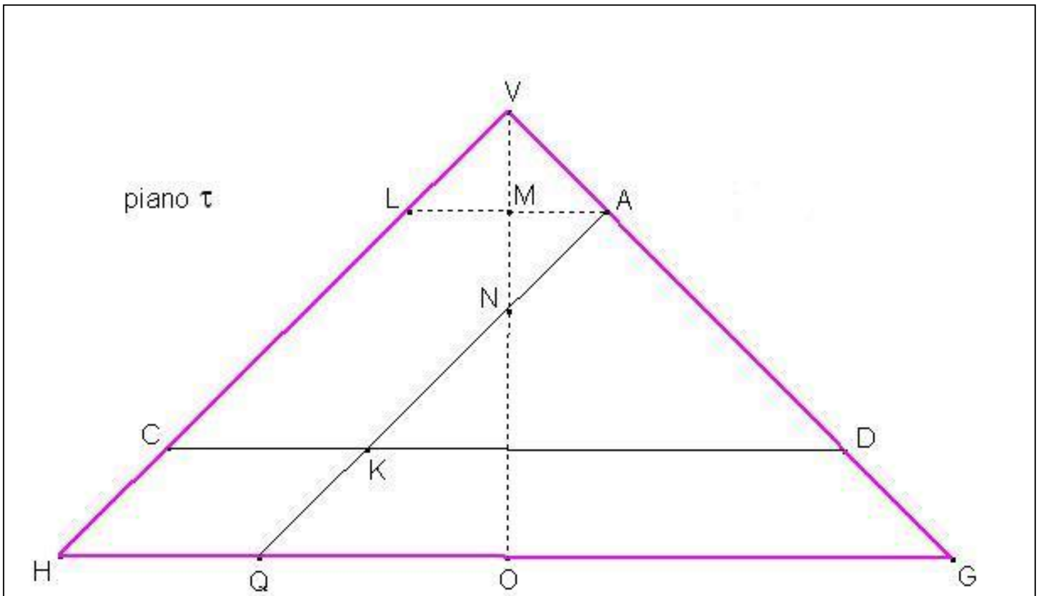


fig.5

La Fig. 5 è ricavata dalla Fig. 4 con la seguente costruzione: sono stati tracciati AL (parallelamente ad HG e CD, quindi alla base del cono) e VO (asse del cono, altezza del triangolo per l'asse) che incontra HG in M e CD in N.
Si vede subito che è VA = AN: tale segmento (che serve a determinare la posizione del piano secante σ) si chiama parametro (o lato retto) della orthotome.
La similitudine dei triangoli KAD e VAM fornisce la proporzione
DK : AK = VA : AM, cioè DK :AK =2VA : 2AM.
Essendo 2AM = AL, dal parallelogramma ALCK otteniamo:
DK : AK = 2VA : KC (**)
Infine, confrontando (*) e (**): KP.KP = 2VA.AK, cioè
2VA : KP = KP : AK (1) che è il sintomo cercato.
Infatti la proporzione (1) è una relazione valida per ogni punto della curva perché KP e AK (come abbiamo osservato) individuano un punto generico della curva stessa.
Sottolineiamo che per dare un significato geometrico semplice al parametro AN = VA si deve uscire dal piano ricorrendo, nello spazio tridimensionale, al cono di cui l'orthotome è sezione.

Oxytome

deduzione del sintomo.

Nota

Si consiglia di ritrovare sul ***modello fisico*** (oppure esplorando l'animazione "***Menecmo: oxytome***" e confrontandolo con la Fig. 6) la giacitura dei tre piani τ, σ, β che utilizzeremo nella dimostrazione e che intersecano il cono retto e acutangolo al quale faremo riferimento. Nelle Fig. 6, 7, 8, 9 si vedono le sezioni che i tre piani determinano sul cono

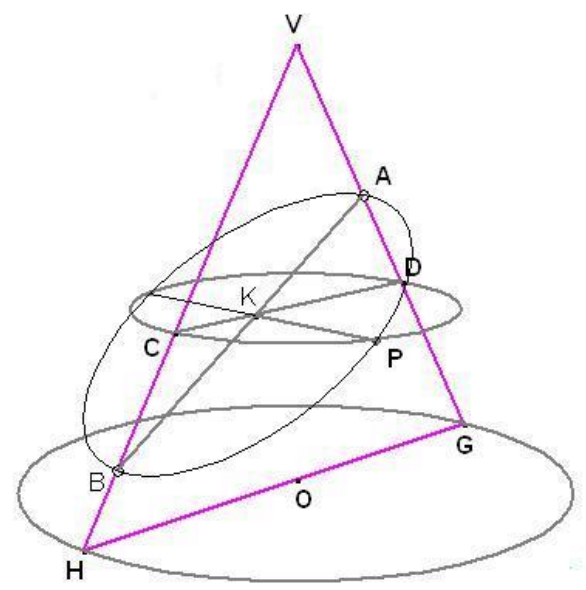


fig.6

In Fig. 6 sono messi in evidenza i tre piani che servono alla deduzione del sintomo. Il piano del triangolo per l'asse (τ) è individuato dai punti V, H, G; il piano secante (σ) è individuato dai punti A, P, B; il piano (β) passante per P e parallelo alla base del cono è individuato dai punti P, D, C che appartengono alla circonferenza intersezione di tale piano col cono.

Dato un cono circolare retto e acutangolo (ottenuto quindi dalla rotazione di un triangolo rettangolo scaleno attorno al cateto di lunghezza maggiore) lo si intersechi con un piano σ passante per il punto A di una generatrice (ipotenusa del triangolo generatore) e a questa perpendicolare.

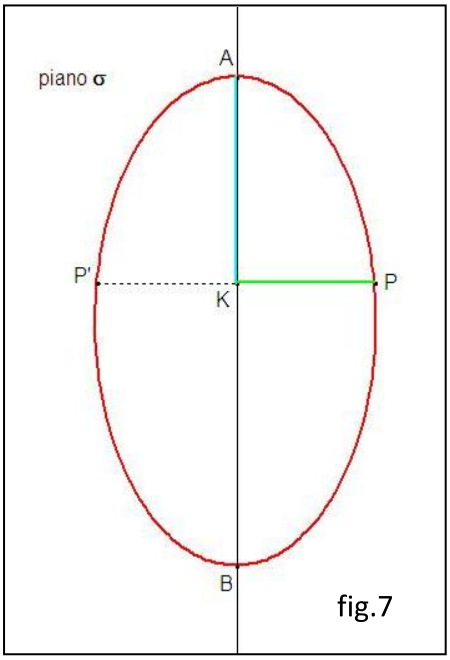


fig.7

Si ottiene come sezione la curva (oxytome) di Fig. 6 (il piano della figura coincide con σ). P è un punto generico della curva.

Consideriamo ora altri due piani: τ, passante per A e per l'asse del cono; β, passante per P e parallelo alla base del cono.

In Fig. 6, la retta passante per A è l'intersezione tra i piani τ e σ, e incontra in B la generatrice opposta a quella cui appartiene A (cfr. più avanti la Fig. 9). Si conduca, da P, la perpendicolare PK a tale retta (K è punto interno al segmento AB) Dato P, restano così individuati i segmenti AK, KP: viceversa, la conoscenza di questi due segmenti permette di individuare il punto P della curva. Osserviamo poi che anche in questo caso, prolungando PK fino ad incontrare la oxytome in P’, risulta PK = KP’ (la retta PP’ è parallela alla tangente all’oxytome in A; AB è un asse della oxytome) (fig.7).

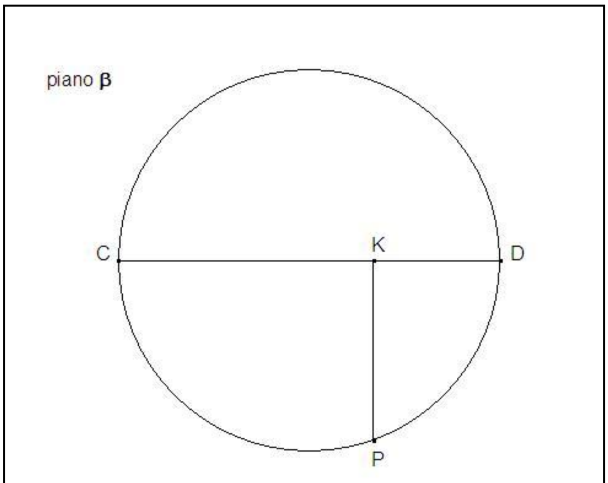


fig.8

In Fig. 8 (dove il piano del disegno coincide col piano β) vediamo: la circonferenza lungo la quale β interseca il cono, e la retta CD generata dalla intersezione tra β e τ.
Per un noto teorema di Euclide si ricava:
CK : KP =KP : KD (*).

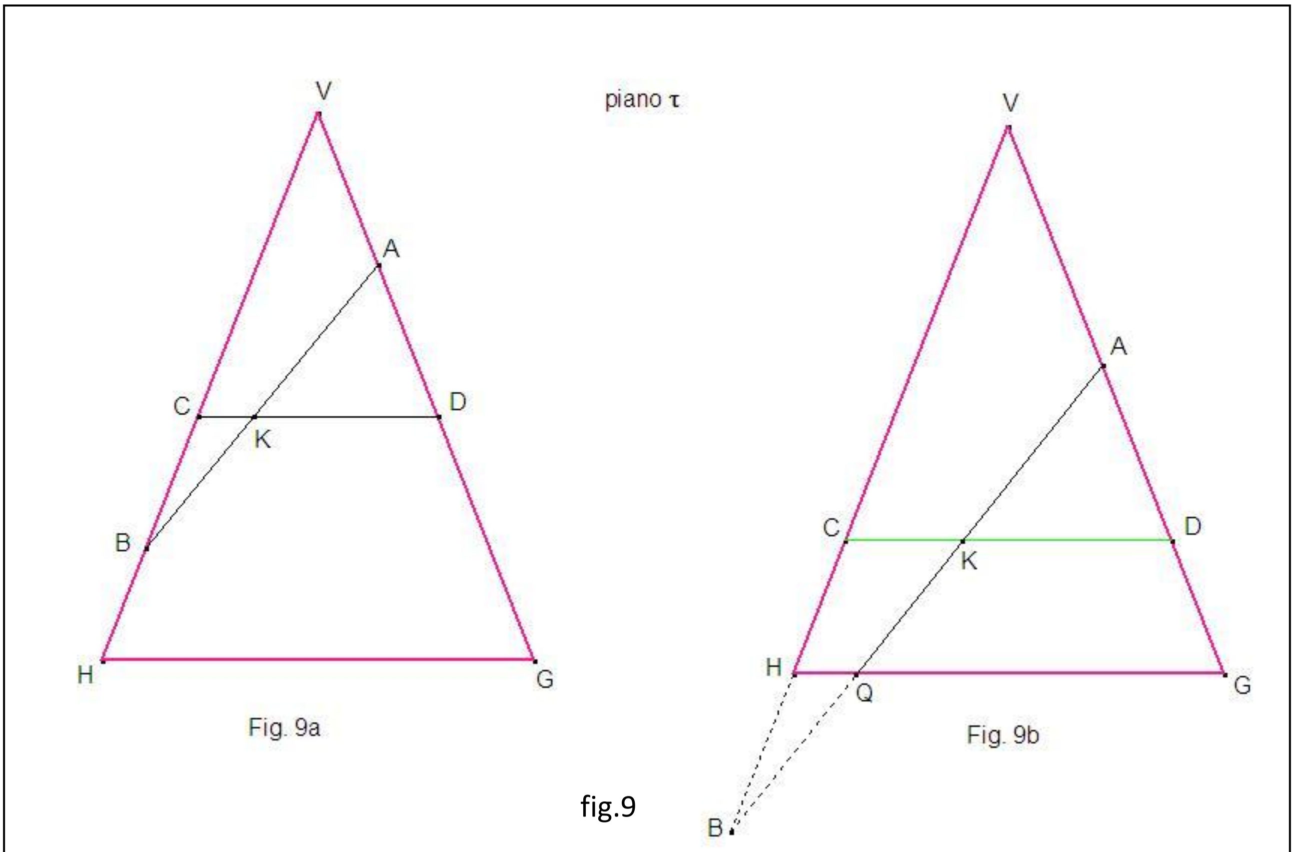
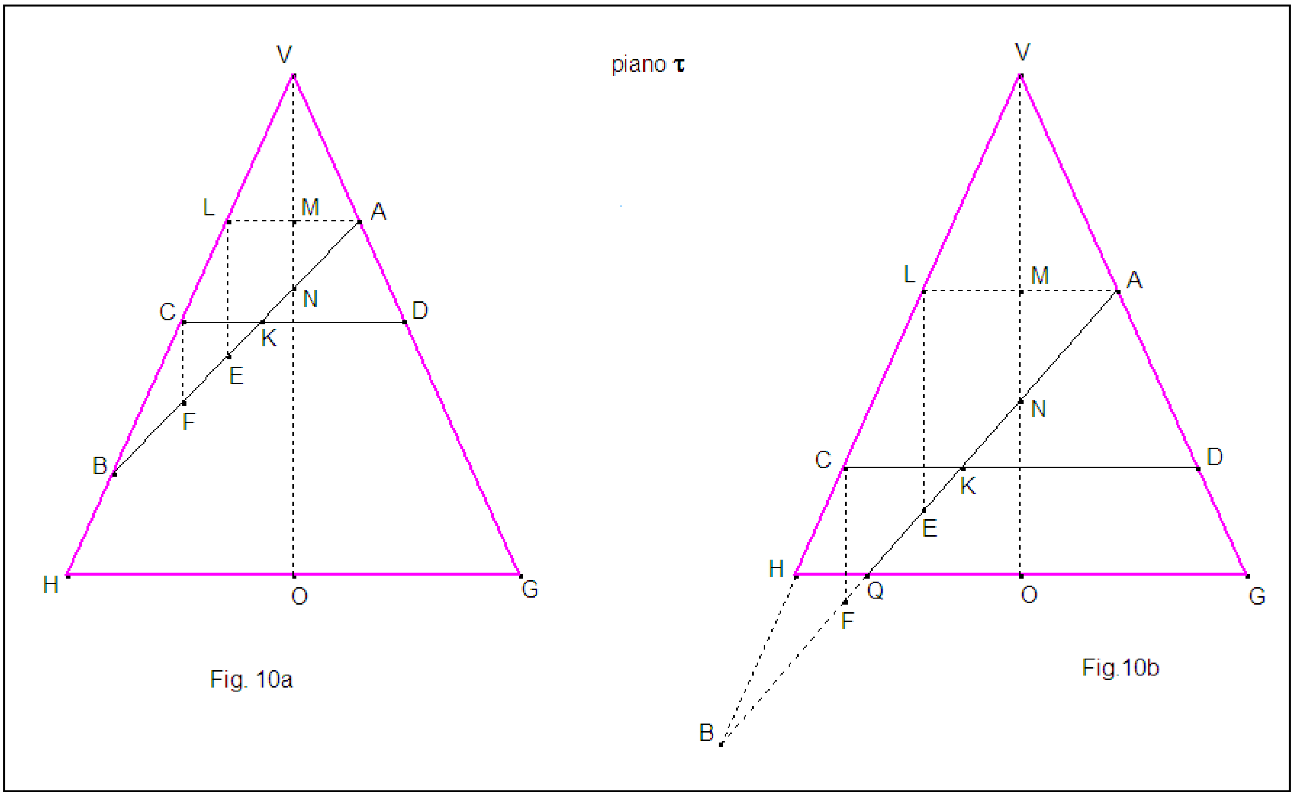


fig.9

In Fig.9 (dove il piano del disegno coincide col piano τ) vediamo invece il triangolo VHG (triangolo per l'asse) generato da τ intersecando il cono, mentre AB (Fig. 9a) (oppure AQ: Fig. 9b) è l'intersezione tra τ e σ, CD quella tra τ e β. (Nella Fig. 9b è stato necessario prolungare AQ e VH per avere il punto B).



Le Fig. 10a e 10b sono ricavate dalle Fig. 9a e 9b (rispettivamente) con la seguente costruzione: si è tracciato AL (parallelamente a CD e ad HG, quindi alla base del cono), poi VO (asse del cono, altezza del triangolo per l'asse) che incontra AL in M e AB in N; infine da L e da C si sono condotte le parallele ad AO fino ad incontrare AB rispettivamente in E ed F. In questo caso VA ≠ AN: il segmento AN (che rappresenta la distanza tra A e il punto N in cui il piano σ incontra l'asse del cono) serve a determinare la posizione di σ, e sarà chiamato **parametro** (o **lato retto**) della oxytome.

Dai triangoli simili CFK e ADK (Fig. 10) si ottiene: CK :FK = KA : KD. Quindi, confrontando con la (*):

KP.KP = CK.KD = FK.KA (**)

Consideriamo ora le coppie di triangoli simili: CFK, LEA e BCK, BLA. Esse forniscono le proporzioni:

FK : EA = CK : LA = BK : AB, da cui: FK : BK = EA :AB

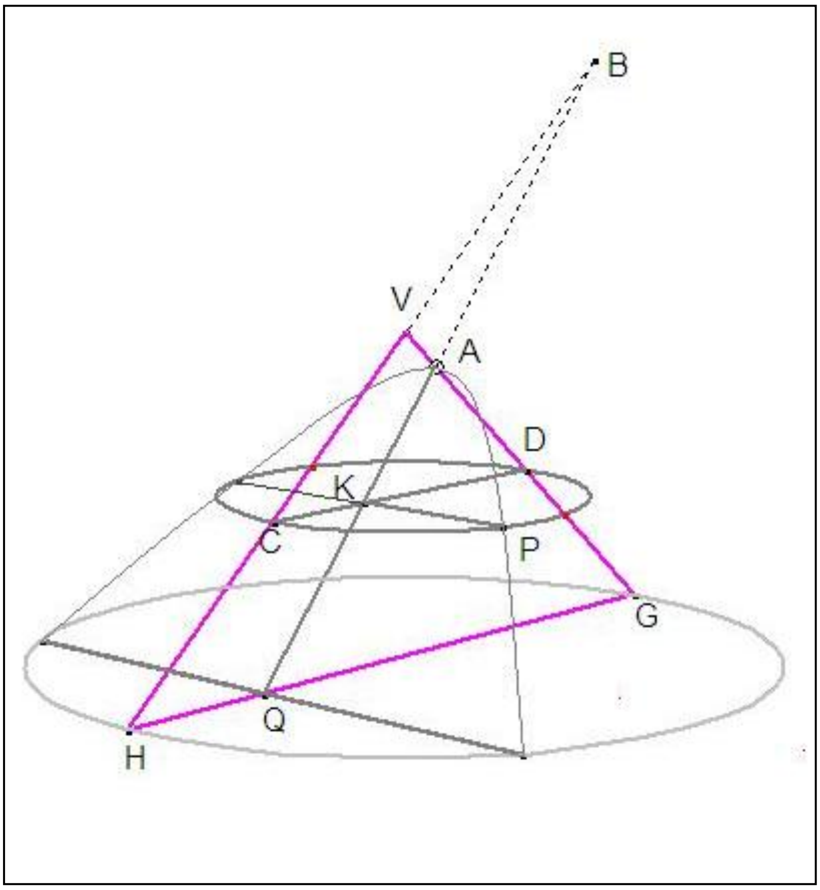
Da quest'ultima, moltiplicando i termini del primo membro per KA e osservando che EA = 2AN, otteniamo:

FK.KA : BK.KA = 2AN : AB (***).

Dal confronto tra (**) e (***) si ricava infine:
KP.KP : BK.KA = 2AN : AB, che (essendo BK = AB – AK) possiamo anche scrivere:
KP.KP : (AB – AK).AK = 2AN : AB (2). Questo è il sintomo cercato:
Infatti la proporzione (2), dove AB e AN sono costanti (asse e parametro caratterizzano la oxytome considerata) è una relazione valida per ogni punto della curva, perché i segmenti KP e AK (come abbiamo già osservato) ne individuano un punto generico.
Sottolineiamo ancora che per dare un significato geometrico semplice al parametro AN si deve uscire dal piano e prendere in esame, nello spazio tridimensionale, il cono di cui l'oxytome è sezione.

Amblytome
deduzione del sintomo.

Nota
Si consiglia di ritrovare sul modello fisico (oppure esplorando l'animazione "Menecmo: amblytome" e confrontandolo con la fig. 11) la giacitura dei tre piani τ, σ, β che utilizzeremo nella dimostrazione e che intersecano il cono retto e ottusangolo al quale faremo riferimento. Nelle Fig. 11, 12, 13, 14 si vedono le sezioni che i tre piani determinano sul cono



In fig. 11 sono messi in evidenza i tre piani che servono alla deduzione del sintomo. Il piano del triangolo per l'asse (τ) è individuato dai punti V, H, G; il piano secante (σ) è individuato dai punti A, P, Q; il piano (β) passante per P e parallelo alla base del cono è individuato dai punti P, D, C che appartengono alla circonferenza intersezione di tale piano col cono.

Dato un cono circolare retto e ottusangolo (ottenuto quindi dalla rotazione di un triangolo rettangolo scaleno attorno al cateto di lunghezza minore) lo si intersechi con un piano σ passante per il punto A di una generatrice (ipotenusa del triangolo generatore) e a questa perpendicolare.
Si ottiene come sezione la curva (**amblytome**) di Fig. 12 (il piano della figura coincide con σ). P è un punto generico della curva.
Consideriamo ora altri due piani: τ, passante per A e per l'asse del cono; β, passante per P e parallelo alla base del cono.
In Fig. 12, la retta passante per A è l'intersezione tra i piani τ e σ, e incontra in B la generatrice opposta a quella cui appartiene A (cfr. Fig. 11, dove si vede che il punto

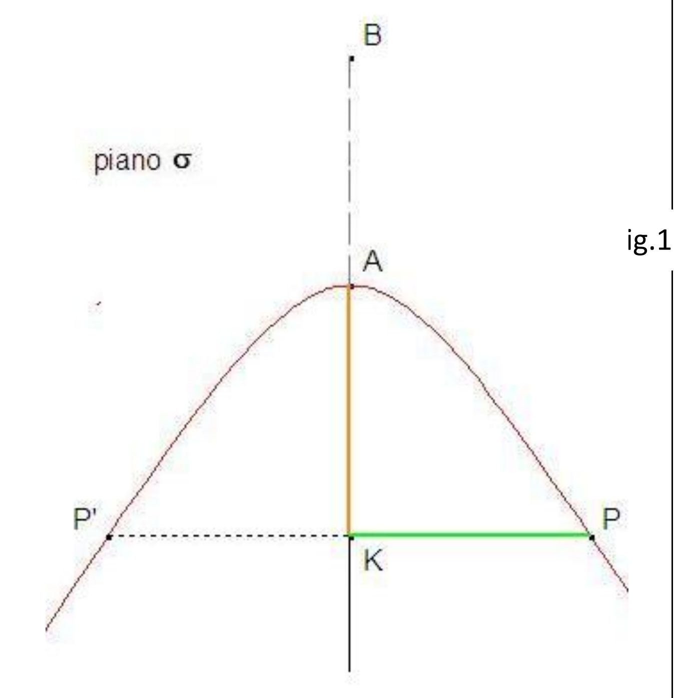


fig.12

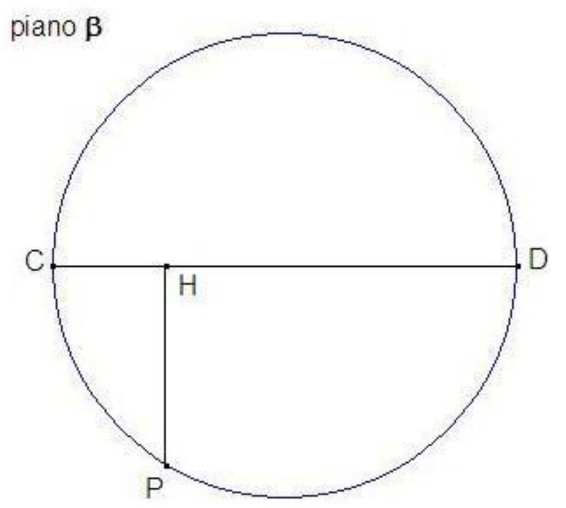


fig.13

B è collocato al di sopra del vertice V, quindi anche al di sopra di A). Si conduca, da P, la perpendicolare PK alla retta AB (K è punto esterno al segmento AB). Dato P, restano così individuati i segmenti AK, KP: viceversa, la conoscenza di questi due segmenti permette di individuare il punto P della curva. Osserviamo poi che anche in questo caso, prolungando PK fino ad incontrare la amblytome in P', risulta PK = KP' (la retta PP' è parallela alla tangente all'amblytome in A; AB è un asse della amblytome).
In Fig. 13 (dove il piano del disegno coincide col piano β) vediamo: la circonferenza lungo la quale β interseca il cono, e la retta CD generata dalla intersezione tra β e τ.
Per un noto teorema di Euclide si ricava:
CK : KP =KP : KD (*).

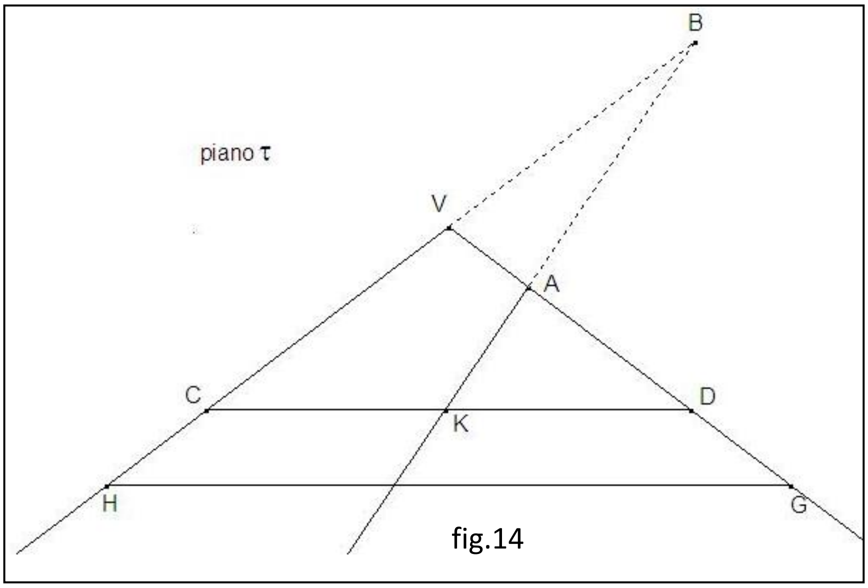


fig.14

In Fig. 14 (dove il piano del disegno coincide col piano τ) vediamo invece il triangolo VHG (triangolo per l'asse) generato da τ intersecando il cono, mentre AQ è l'intersezione tra τ e σ, CD quella tra τ e β. (Nella Fig. 14 è stato necessario prolungare AQ e VH per avere il punto B).

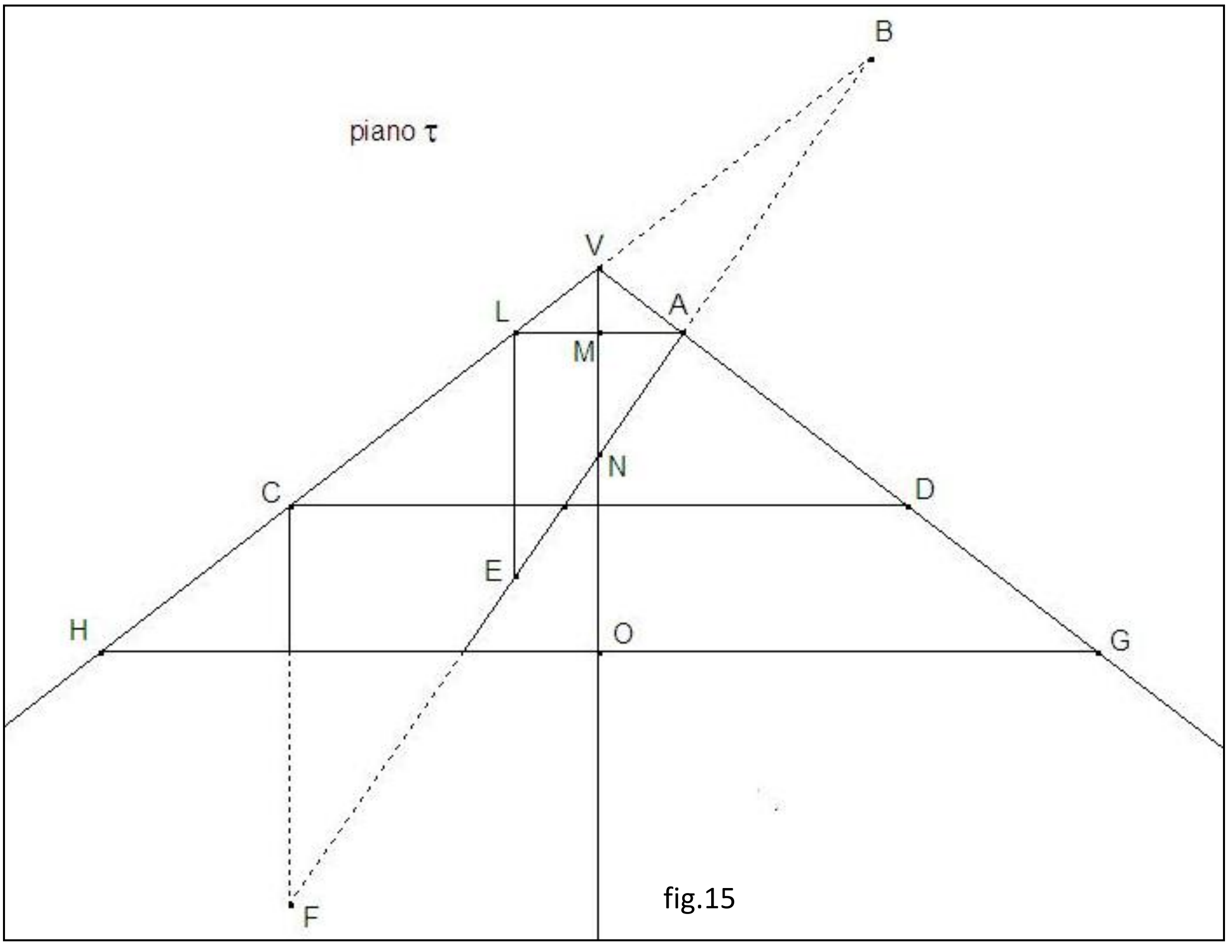


fig.15

La Fig. 15 è ricavata dalla Fig. 14 con la seguente costruzione: si è tracciato AL (parallelamente a CD e ad HG, quindi alla base del cono), poi VO (asse del cono, altezza del triangolo per l'asse) che incontra AL in M e AB in N; infine da L e da C si sono condotte le parallele ad AO fino ad incontrare AB rispettivamente in E ed F. In questo caso VA ≠ AN: il segmento AN (che rappresenta la distanza tra A e il punto N in cui il piano σ incontra l'asse del cono) serve a determinare la posizione di $\boldsymbol{\sigma}$ e sarà chiamato **parametro** (o **lato retto**) della amblytome.

La deduzione procede ora in modo simile a quello già visto nel caso della oxytome.
Dai triangoli simili CFK e ADK (Fig. 15) si ottiene: CK :FK = KA : KD. Quindi, confrontando con la (*):
KP.KP = CK.KD = FK.KA (**)
Consideriamo ora le coppie di triangoli simili: CFK, LEA e BCK, BLA. Esse forniscono le proporzioni:
FK : EA = CK : LA = BK : AB, da cui: FK : BK = EA :AB
Da quest'ultima, moltiplicando i termini del primo membro per KA e osservando che EA = 2AN, otteniamo:
FK.KA : BK.KA = 2AN : AB (***).
Dal confronto tra (**) e (***) si ricava infine:
KP.KP : BK.KA = 2AN : AB, che (essendo BK = AB + AK) possiamo anche scrivere:
KP.KP : (AB + AK).AK = 2AN : AB (3). Questo è il **sintomo** cercato:
Infatti la proporzione (3), dove AB e AN sono costanti (asse e parametro caratterizzano la amblytome considerata) è una relazione valida per ogni punto della curva, perché i segmenti KP e AK (come abbiamo già osservato) ne individuano un punto generico.
Sottolineiamo ancora che per dare un significato geometrico semplice al parametro AN si deve uscire dal piano e prendere in esame, nello spazio tridimensionale, il cono di cui l'amblytome è sezione.

Conclusione

Il lettore moderno è tentato di scrivere le proprietà (1), (2) e (3) in un linguaggio diverso.
Assunto nel piano $\boldsymbol{\sigma}$ un sistema di riferimento avente come origine A, come asse delle ascisse l'intersezione tra i piani $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ (asse di simmetria ortogonale per la conica), come asse delle ordinate la parallela condotta per A all'intersezione tra $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\beta}$ (tangente in A alla conica) si ha subito:
AK = x, PK = y. Posto inoltre AB = a, AN = p sostituendo nelle (1), (2), (3) si ricava:

da (1) $2p : y = y : x$ cioè $y^2 = 2px$

da (2) $y^2 : (a - x)x = 2p : a$ cioè $ay^2 + 2px^2 - 2apx = 0$
da (3) $y^2 : (a + x)x = 2p : a$ cioè $ay^2 - 2px^2 - 2apx = 0$

Otteniamo così equazioni a noi familiari, che però appartengono a uno spazio culturale profondamente diverso da quello in cui operava Menecmo (l'algebra viene applicata alla geometria, le lettere indicano numeri e non segmenti di retta, per l'interpretazione delle costanti non è necessario ricorrere ai coni su cui giacciono le curve considerate, ecc.). Scopo di queste pagine è invece avviare a una corretta lettura dei testi matematici antichi, che cioè non introduca in essi nulla di estraneo all'epoca storica in cui si sono formati.

A cura della Associazione Macchine Matematiche
Modena, novembre 2009