Ellissografo di Van Schooten

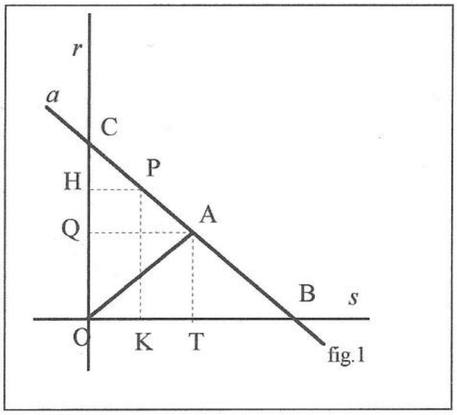

fig.1

E' un tipico esempio di sistema biella-manovella. L'asta a (biella) ha l'estremo B, dotato di cursore, vincolato a scorrere nella scanalatura s, mentre l'asta OA (manovella) è imperniata in O al piano del modello e incernierata in un punto A della biella scelto in modo tale che $\overline{AB} = \overline{OA} = l$. Durante il movimento il punto C dell'asta , distante l da A descrive la retta r perpendicolare per O ad s , mentre ogni altro punto P dell'asta descrive un'ellisse avente centro in O e assi di simmetria coincidenti con s ed r ; la lunghezza dei semiassi sono rispettivamente PC e PB . Per fissare la posizione di P sull'asta è sufficiente assegnarne la distanza d da B ; sarà quindi $\overline{PC} = 2l - d$, $\overline{PB} = d$. Se P è scelto internamente al segmento AB, l'ellisse descritta ha semiasse maggiore su s e semiasse minore su r; viceversa se P è sul prolungamento di AB **.** Punti simmetrici rispetto ad A descrivono ellissi simmetriche rispetto alle bisettrici dei quadranti determinati da s e da r.

Anche in questo caso la dimostrazione può essere svolta in vari modi (utilizzando ad esempio le equazioni parametriche o le coordinate polari); presentiamo una dimostrazione che si basa sulla geometria elementare.

1° Dimostrazione (geoemetria elementare)

Riferita la fig.1 ad un sistema di assi cartesiani ortogonali coincidente con sOr , siano (x,y) le coordinate di P. Dalla similitudine dei triangoli CPH e PBK si ha : $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{BK}}{\overline{PB}}$ dove:

$\overline{PH} = |x|$ $\quad \overline{CP} = |2l - d|$ $\quad \overline{PB} = d$ $\quad BK = \sqrt{d^2 - y^2}$ da cui :

$\dfrac{x^2}{(2l-d)^2} = \dfrac{d^2 - y^2}{d^2}$ e quindi $\dfrac{x^2}{(2l-d)^2} + \dfrac{y^2}{d^2} = 1$ equazione cartesiana dell'ellisse descritta da P.

2° Dimostrazione (equazioni parametriche)

Posto $A\hat{O}B = A\hat{B}O = \alpha$ si ha : $\overline{PH} = \overline{CP}\cos\alpha$ e $\overline{PK} = \overline{CB}\sin\alpha$, da cui :

$$\begin{cases} x = (2l-d)\cos\alpha \\ y = d\sin\alpha \end{cases}$$ equazioni parametriche dell'ellisse

3° Dimostrazione (equazione polare)

Fissato un sistema di coordinate polari con origine coincidente con Os si ha :

$\overline{OP} = \rho$ e $P\hat{O}B = \vartheta$. Posto $A\hat{D}B = \alpha$, applicando il teorema dei seni ai triangoli OPC e OPB si ha :

$\overline{OP}\sin\vartheta = \overline{PB}\sin\alpha$ da cui $\sin\alpha = \dfrac{\rho\sin\vartheta}{d}$

$\overline{OP}\sin(90 - \vartheta) = \overline{PC}\sin(90 - \alpha)$ da cui $\cos\alpha = \dfrac{\rho\cos\vartheta}{2l - d}$

e quindi : $\rho^2\left[(2l-d)^2\sin^2\vartheta + d^2\cos^2\vartheta\right] = d^2(2l-d)^2$ equazione polare dell'ellisse.

Quando il punto P viene scelto sovrapposto ad A, descrive la circonferenza di centro O e raggio l ; quando P coincide con B (oppure con C) descrive una ellisse degenere in un segmento lungo $4l$, posto su s (o su r) con punto medio in O.

Il punto P è il corrispondente di A in una affinità le cui equazioni possono essere ricavate nel seguente modo:
indicate con (x,y) le coordinate di A e con (x',y') le coordinate di P , dalla similitudine dei triangoli CPH e CAQ si ha : $\frac{x'}{x} = \frac{(2l-d)}{l}$ e dalla similitudine dei triangoli PKB e ATB si ha: $\frac{y'}{y} = \frac{d}{l}$ da cui $\begin{cases} x' = \frac{(2l-d)}{l}x \\ y' = \frac{d}{l}y \end{cases}$ equazioni della affinità prodotto di due stiramenti in direzione Ox e Oy.

Modificando la macchina in modo tale che sia $AB \neq l$ (ad esempio spostando la cerniera A in un diverso punto della biella) si può verificare che essa non è più un ellissografo ; in tal caso infatti le curve descritte dai punti P della biella sono quartiche