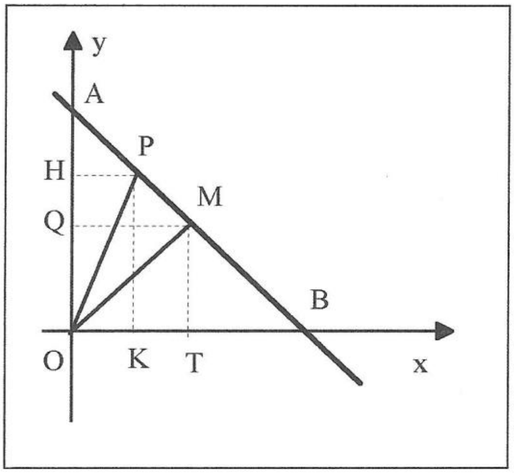
Ellissografo di Proclo



I punti A e B, fissati su di un'asta rigida graduata , dotati di cursori, sono vincolati a scorrere lungo due scanalature (Ox e Oy) fra loro perpendicolari, applicate al piano del modello . Durante il moto la loro distanza AB=l rimane costante.
Un generico punto P dell'asta, avente da A e da B rispettivamente distanza PA=a e PB=b, descrive una ellisse che ha gli assi di simmetria coincidenti con le scanalature Ox e Oy, e i cui semiassi hanno lunghezze a e b .Se $\overline{PA} < \overline{PB}$, l' asse maggiore giace su Oy, se $\overline{PA} > \overline{PB}$, l'asse maggiore giace su Ox.
Si può dimostrare o verificare (sul modello o mediante la simulazione in Cabri) che i punti dell'asta esterni al segmento AB e i punti interni al segmento AB descrivono le ellissi in verso opposto . Punti simmetrici rispetto ad M (punto medio di AB) descrivono ellissi simmetriche rispetto alle bisettrici dei quadranti individuati dalle scanalature. Punti simmetrici rispetto ad A (oppure a B) descrivono ellissi tangenti nei vertici appartenenti ad Ox (oppure Oy).

1° Dimostrazione (basata sulla geometria elementare).
Fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali coincidenti con Ox e Oy; siano *(x,y)* le coordiante di O .Dalla similitudine dei triangoli APH e PBK si ha :$\dfrac{\overline{HP}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{KB}}{\overline{PB}}$ ove :
$\overline{HP} = |x|$,$\overline{PK} = |y|$, $\overline{AP} = a$, $\overline{PB} = b$, $\overline{KB} = \sqrt{b^2 - y^2}$ si ha:
$\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{b^2 - y^2}{b^2}$ quindi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ equazione canonica dell'ellisse.

2° Dimostrazione (equazioni parametriche)
Posto $M\hat{O}B = M\hat{B}O = \alpha$ si ha $PH = a\cos\alpha$ e $PK = b\sin\alpha$
$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases}$ equazioni parametriche dell'ellisse

3° Dimostrazione (equazione polare)
Fissato un sistema di coordinate polari con origine coincidente con Ox si ha
$OP = \rho$ e $P\hat{O}B = \theta$. Sia inoltre $M\hat{O}B = \alpha$. Applicando il teorema dei seni ai triangoli OPA e OPB si ha :
$\dfrac{OP}{\sin\alpha} = \dfrac{PB}{\sin\theta}$ da cui $\sin\alpha = \dfrac{OP\sin\theta}{PB} = \dfrac{\rho\sin\theta}{b}$

$\dfrac{OP}{\sin(90-\alpha)} = \dfrac{PA}{\sin(90-\theta)}$ da cui $\cos\alpha = \dfrac{OP\cos\theta}{AP} = \dfrac{\rho\cos\theta}{a}$ e quindi:
$\rho^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) = a^2b^2$ equazione polare dell'ellisse

Se P coincide con M la curva descritta è una circonferenza di centro O e raggio $r = \frac{l}{2}$.
Se P coincide con A (o con B) l'ellisse tracciata degenera nel segmento di lunghezza $2l$ posto su Oy (o su Ox), con punto medio in O.

Il punto P è il corrispondente di M in una affinità; infatti:
indicate con (x,y) le coordinate di M e con (x', y') le coordinate di P , dalla similitudine dei triangoli APH e AMQ si ha :$\frac{x'}{x} = \frac{a}{l/2}$ e dalla similitudine dei triangoli BPK e BMT si ha : $\frac{y'}{y} = \frac{b}{l/2}$ da cui : $\begin{cases} x' = \frac{2a}{l}x \\ y' = \frac{2b}{l}y \end{cases}$ equazioni di una affinità prodotto di due stiramenti con direzioni rispettivamente l'asse delle ascisse e quello delle ordinate.