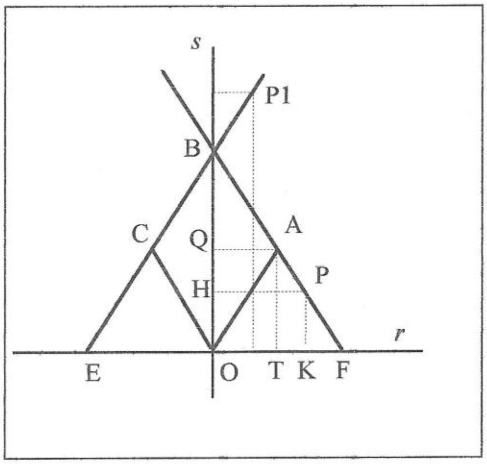
Ellissografo di Leonardo



Il meccanismo è costituito da un rombo articolato OABC di lato l il cui vertice O è imperniato al piano del modello e il vertice opposto B, dotato di cursore , è vincolato a scorrere nella scanalatura s passante per O. Quando B scorre lungo la scanalatura i vertici A e C descrivono insieme la semicirconferenza di centro O e raggio l , mentre ogni altro punto P delle aste dei lati AB e BC descrive la quarta parte di una ellisse di centro O e assi di simmetria coincidenti con la scanalatura s e con la retta r perpendicolare ad s condotta per O. Durante il movimento i punti E ed F distanti l rispettivamente da C e da A descrivono ciascuno un segmento della retta r con un estremo in O e lunghezza $2l$. *Punti* simmetrici rispetto ad s descrivono insieme la metà di una stessa ellisse. Indicata con d la distanza di P da B , le lunghezze dei semiassi delle ellissi descritte sono d (su r) e $2l+d$ (su s) quando P cade sul prolungamento del lato AB (o CB), dalla parte di B, mentre sono d e $|2l-d|$ in ogni altro caso.

La dimostrazione può essere svolta in vari modi (utilizzando ad esempio le equazioni parametriche oppure le coordinate polari); presentiamo la dimostrazione che si basa sulla geometria elementare.
Riferita la figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy coincidente con rOs , dalla similitudine dei triangoli PHB e PKF si ha :

$\frac{PH}{PB}=\frac{FK}{FP}$,dove $\overline{PH}=|x|$, $\overline{PF}=|2l-d|$, $\overline{KF}=\sqrt{(2l-d)^2-y^2}$ quindi:

$\frac{x^2}{d^2}=\frac{(2l-d)^2-y^2}{(2l-d)^2}$ cioè : $\frac{x^2}{d^2}+\frac{y^2}{(2l-d)^2}=1$ equazione canonica dell'ellisse.

Il punto P è il corrispondente di A in una affinità : infatti , indicate con (x,y) le coordinate di A e con (x',y') le coordinate di P, dalla similitudine dei triangoli BPH e BAQ si ha :

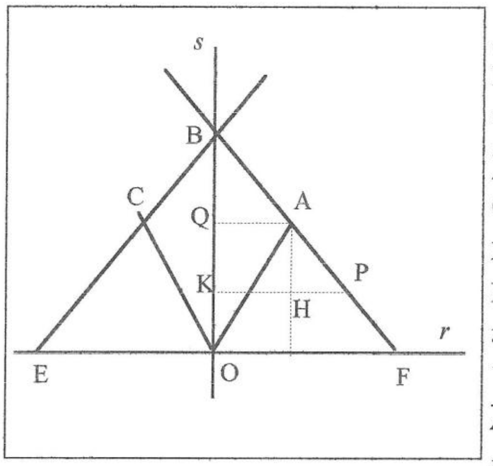
$$\frac{PH}{AQ}=\frac{PB}{AB}\Rightarrow\frac{x'}{x}=\frac{d}{l}$$

e dalla similitudine dei triangoli ATF e PKF si ha

$$\frac{PK}{AT}=\frac{PF}{AF}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{2l-d}{l}$$ quindi:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{d}{l}x \\ y'=\dfrac{(2d-l)}{l}y \end{cases}$$ equazioni di una affinità prodotto di due stiramenti in direzione Ox e Oy.

Se sostituissimo il rombo con un deltoide avente i vertici appartenenti all'asse di simmetria coincidenti con O e B non otterremmo un ellissografo: in tal caso ogni punto delle aste dei lati AB e BC descriverebbe un arco di quartica. Infatti :



sia OA=l, $AB=h$; indichiamo con (x,y) le coordinate di P e con (x_A, y_A) le coordinate di A.
Dalla similitudine dei triangoli PAH e BAQ si ha:
$\frac{AH}{AP}=\frac{BK}{BP}$ ove
$\overline{AH}=|y_a-y|$, $\overline{AP}=|d-h|$, $\overline{BK}=\sqrt{d^2-x^2}$. da cui
$y_A-y=\frac{d-h}{d}\sqrt{d^2-x^2}$
Dalla similitudine dei triangoli PKB e AQB si ha:
$\frac{AQ}{AB}=\frac{PK}{PB}$ ove

$\overline{AQ}=x_A$, $\overline{AB}=h$, $\overline{PK}=x$, $\overline{PB}=d$ da cui
$x_A=\frac{h}{d}x.$

Poiché $x_A^2+y_A^2=l^2$ si ha :
$\frac{h^2}{d^2}x^2+\left(y+\frac{d-h}{d}\sqrt{d^2-x^2}\right)^2=l^2$ equazione cartesiana della quartica descritta da P.