

ANAMORFOSI CATOTTRICHE (CONI CON SUPERFICI RIFLETTENTI)

(Fonti: J. F. Niceron, “*La perspective curieuse, ou magie artificielle ...*”, Parigi 1638; Du Breuil, “*La Perspective pratique...*”, Parigi 1642; Gaspard Scott, “*Magia universalis naturae et artis*”, Wurtzburg 1657, Parte II, Libro III).⁽¹⁾

Sia dato un piano π e una piramide retta a facce riflettenti avente come base un poligono regolare appartenente a π ; la regione del piano π di cui si può vedere l'immagine riflessa guardando da un punto posto sull'asse della piramide verso il vertice di questa, è costituita da un insieme di triangoli isosceli, adiacenti alla base della piramide: uno per ognuna delle facce riflettenti.

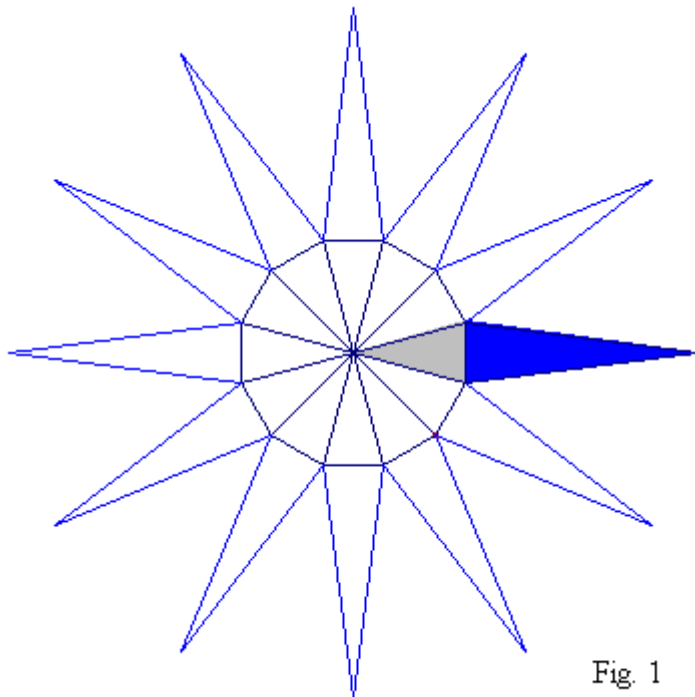


Fig. 1

La Figura 1 illustra il caso di una piramide a base dodecagonale. Sono messi in evidenza due triangoli: quello interno alla base della piramide è l'immagine virtuale di quello esterno. Sappiamo che, se l'occhio dell'osservatore si allontana dal vertice, la corrispondenza indotta tra i punti dei due triangoli dalle leggi della riflessione (si tratta di una omologia avente come “segmento unito” il lato della base ad essi comune) tende a diventare una particolare omologia affine (stiramento):

a questa esattamente si riduce quando l'occhio (sulla retta che contiene l'asse della piramide) si trova a distanza infinita dal vertice ⁽²⁾

Supponiamo ora di aumentare (lasciando invariato il diametro della circonferenza circoscritta) il numero dei lati (n) del poligono di base: i “segmenti uniti” si accorciano, i deltoidi formati da triangoli corrispondenti si “assottigliano”. Al limite (per n tendente all'infinito) il poligono di base tenderà a coincidere con la circonferenza circoscritta; la piramide diventerà un cono circolare retto (con superficie esterna riflettente); i triangoli “infinitamente sottili” osservabili da tale punto di vista ricopriranno una corona circolare avente come immagine virtuale il cerchio di base del cono; i deltoidi diventeranno segmenti concorrenti nel centro della base.

Su ognuno di tali segmenti (Figura 2) i punti Q interni alla corona circolare adiacente alla base del cono ⁽³⁾ e i punti P interni a quest'ultima (immagini virtuali dei punti Q)

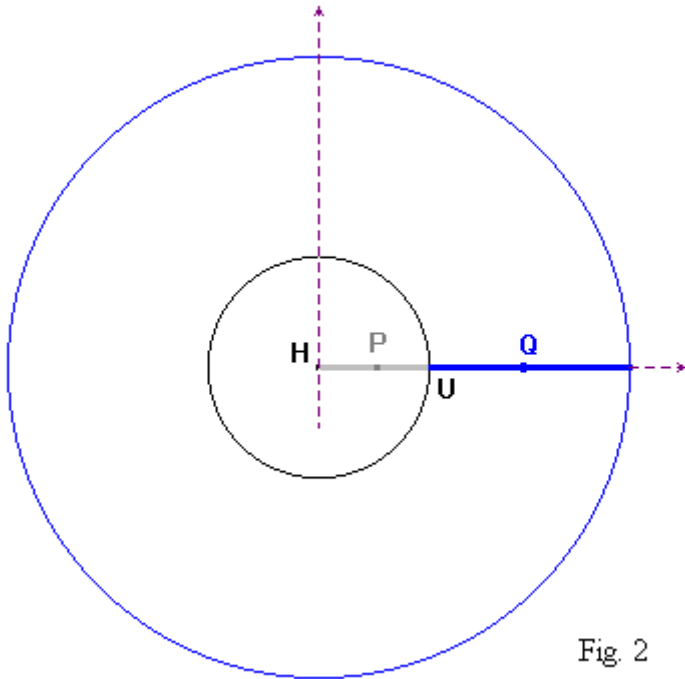


Fig. 2

saranno legati dalla relazione (già dimostrata – cfr. scheda di approfondimento – per la piramide a facce riflettenti quando il punto di vista è all'infinito):

$$(*) \begin{cases} x'-a = \frac{x-a}{\cos 2\alpha} \\ y' = y \end{cases} \text{ (Riferimento}$$

cartesiano: centro H, asse delle ascisse HU)

E' chiaro che nella (*), in questo caso, si avrà $y' = y = 0$; ci sarà inoltre un solo punto unito U: quello appartenente alla circonferenza base del cono, di raggio a . La deduzione che ci ha portato alla (*) (cfr. scheda sulla

piramide) rimane invariata; dovrà essere svolta (Figura 3) su uno qualsiasi dei piani che, passando per l'asse del cono (perpendicolarmente alla sua base), lo tagliano lungo uno "specchio infinitesimo". Ruotando tale piano attorno all'asse si passerà con continuità da uno "specchio infinitesimo" a quelli che lo precedono o seguono sulla superficie del cono e ne costituiscono le generatrici.

Si noti che invece, nel caso dello specchio piramidale, il passaggio da una faccia all'altra comporta una discontinuità: cambia bruscamente la giacitura del piano contenente i punti Q, la normale allo specchio, i raggi incidente e riflesso.

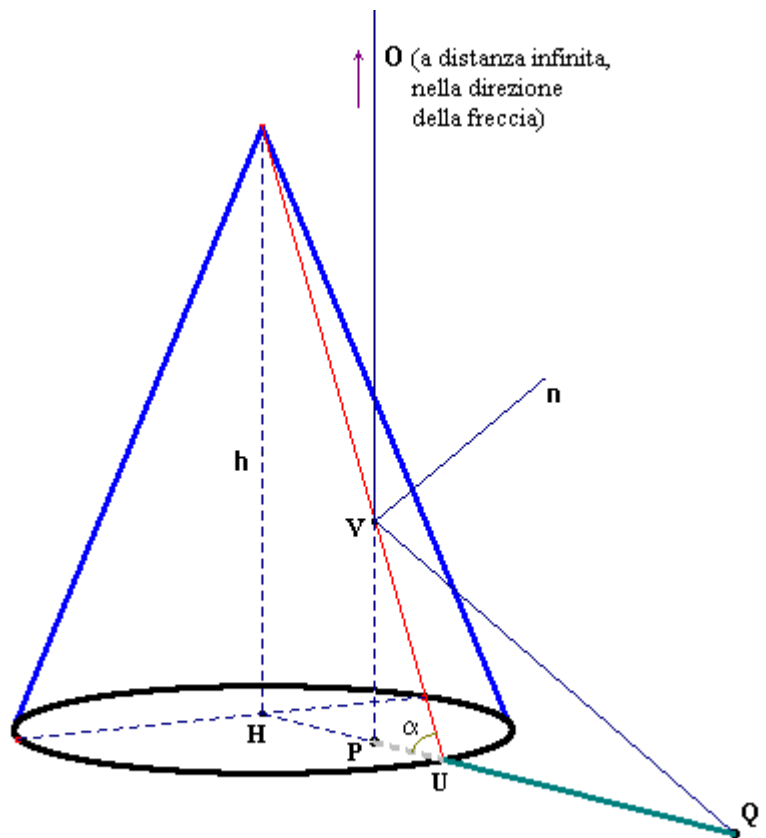


Fig. 3

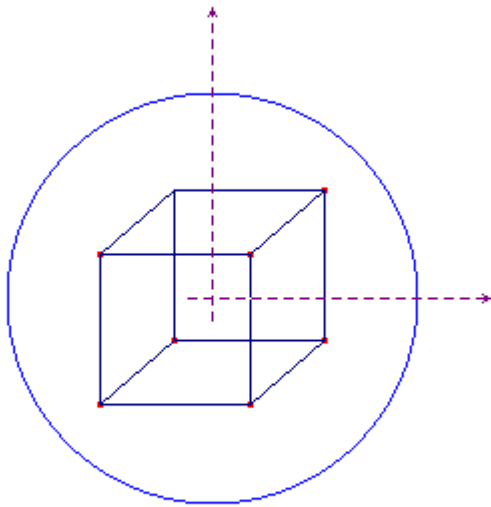


Fig. 4

Nel caso di uno specchio conico come quello qui considerato, la (*) è più agevolmente utilizzabile se viene scritta in un sistema di coordinate polari (polo in H, asse polare HU: Figura 3) con le seguenti sostituzioni: $x \rightarrow \rho$, $x' \rightarrow \rho'$, $y \rightarrow \theta$, $y' \rightarrow \theta'$:

$$\text{Risulta: } \begin{cases} \rho' - a = \frac{\rho - a}{\cos 2\alpha} \\ \theta' = \theta \end{cases} \quad (**)$$

(dove θ può variare con continuità da 0 a 2π).

Servendosi della (**) è possibile determinare quale figura \mathfrak{S} deve essere disegnata nella corona circolare affinché un osservatore posto in O ne raccolga una prefissata immagine virtuale \mathfrak{S}' . Come esempio, abbiamo costruito l'anamorfo

della rappresentazione assonometrica di un cubo. ⁽⁴⁾

Siamo partiti da un modello concreto dell'immagine virtuale (Figura 4): dopo aver ricavato le coordinate $(x; y)$ dei suoi punti (nel sistema cartesiano ortonormale di Figura 4), calcolato le coordinate $(\rho; \theta)$ (mediante le consuete formule:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = \rho^2) \text{ e le coordinate } (\rho'; \theta')$$

attraverso le (**), abbiamo ritrasformato $(\rho'; \theta')$ (usando sempre il riferimento

cartesiano di Figura 4) in coordinate $(x'; y')$, più comode per tracciare il disegno anamorfo. Poiché, per vedere l'immagine virtuale l'occhio deve trovarsi sull'asse dello specchio conico (a opportuna distanza dal vertice), è comodo un oculare che indichi la posizione corretta.

E' possibile ottenere questo disegno (e altri analoghi) anche mediante costruzioni con riga e compasso, oppure per via meccanica:

◆ Ad esempio, con un proiettore

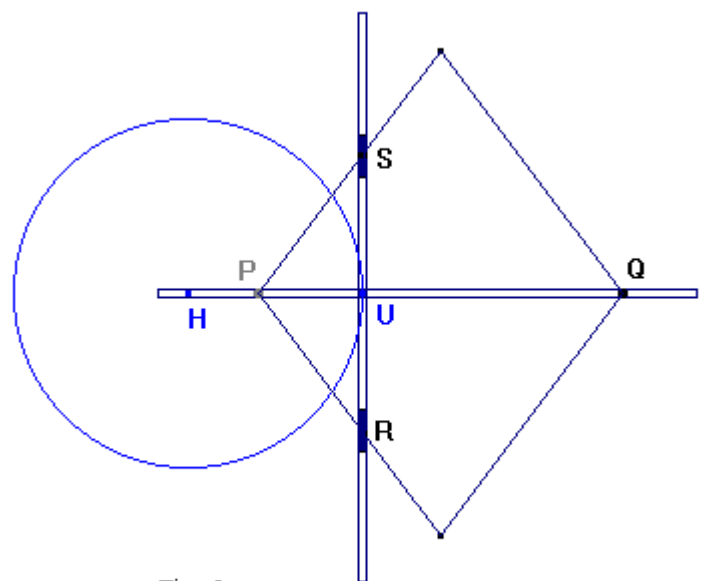


Fig. 5

di Delaunay modificato come segue (Cfr. Figura 5):

alla scanalatura rettilinea in cui scorrono i cursori R ed S è fissata (in U) mediante saldatura, una seconda scanalatura rettilinea, in direzione perpendicolare alla prima, entro la quale sono costretti a muoversi i vertici opposti P e Q del rombo articolato. La seconda scanalatura è fissata a un perno H tale che $HU = a$ (raggio di base del cono). In questo modo U percorre la circonferenza di base del cono: se le lunghezze $PS = PR$ sono scelte in modo opportuno, quando P percorre una figura \mathfrak{S} qualsiasi (interna al cerchio di base del cono) Q traccia automaticamente la figura trasformata \mathfrak{S}' (anamorfosi di \mathfrak{S}), poiché in ogni istante risulta verificata la (**).

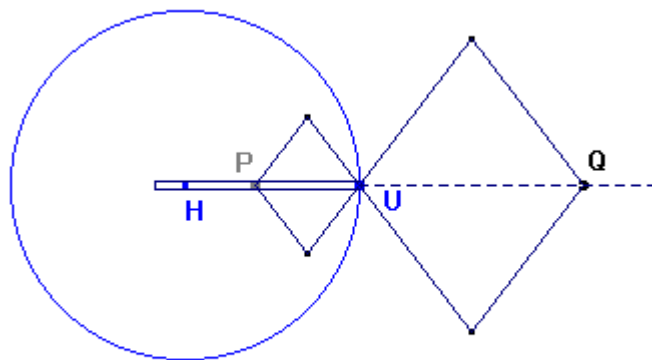


Fig. 6

◆ Più semplice l'idea (1973) di M. Parrè ⁽⁵⁾ (Figura 6).

Una scanalatura rettilinea HU è vincolata al perno H in modo che $HU = a$ (raggio di base dello specchio conico). Due rombi articolati, costituiti da sei aste incernierate come in figura, aventi un vertice comune in U, hanno in P e in Q gli estremi opposti ad U. Il vertice P è costretto a muoversi nella scanalatura HU (che ruota attorno ad H. I vertici P, Q sono di conseguenza allineati con U. Se il rapporto tra i lati dei due rombi è scelto in modo opportuno, quando P descrive una figura \mathfrak{S} qualsiasi (interna al cerchio di base del cono) Q traccia automaticamente la figura trasformata \mathfrak{S}' (anamorfosi di \mathfrak{S}), poiché in ogni istante risulta verificata la (**).

⁽¹⁾ Nel trattato di Schott, (*De Magia anamorphotica*) la parte dedicata alle anamorfosi catottriche ha come titolo “*De Anamorphosi Catoptrica, sive de reformatione imaginum deformatorem per radios reflexos seu per specule*”. I metodi degli autori del Seicento sono naturalmente diversi da quelli (fondati sulla teoria delle trasformazioni) che abbiano qui utilizzato: per maggiori informazioni, rinviamo alla **Antologia**.

⁽²⁾ Condizione irrealizzabile in pratica: tuttavia, per distanze occhio – vertice (misurate lungo l'asse della piramide, sul quale l'occhio deve trovarsi) uguali a qualche metro, le conclusioni (esatte per distanze infinitamente grandi) valgono con buona approssimazione.

⁽³⁾ Questa corona circolare ha $HU = a$ come raggio della circonferenza interna; il raggio di quella esterna è $-h \tan 2\alpha$, essendo $\alpha = \angle VUH$ (cfr. Figura 3).

⁽⁴⁾ Per decodificarla, si collocherà l'occhio sull'asse dello specchio conico, a notevole distanza dal vertice (cfr. nota precedente). A rigore, si sarebbero dovute usare relazioni diverse

⁽⁵⁾ Cfr. J. Baltrušaitis, *Anamorfosi e magia artificiale degli effetti meravigliosi*, Adelphi MI 1978.