

## ANAMORFOSI CATOTTRICHE (Cilindro: costruzioni e calcoli)

(Fonti: J. F. Nicéron, *“La perspective curieuse, ou magie artificielle ...”*; *“Thamaturgus Opticus, seu admiranda Optices per radium directum...”*, Parigi 1646, Langlois; 1669, Du Puis).<sup>(1)</sup>

Facciamo riferimento alla Figura 1. Occorre determinare:

- la corrispondenza tra i piani  $\gamma'$  e  $\pi$  (piano di base del cilindro) che al punto  $P$  di  $\gamma'$  associa il punto  $P'$  intersezione del prolungamento del raggio  $\delta$  (oltre  $A$ ) con il piano  $\pi$  (ricordiamo che  $\gamma'$  contiene l'asse del cilindro  $C$  ed è parallelo alle rette di contatto dei piani tangenti a  $C$  uscenti da  $O$ );
- il punto  $Q$  di  $\pi$ , simmetrico di  $P'$  rispetto al piano  $\tau$  tangente in  $A$  alla superficie cilindrica  $C$ .

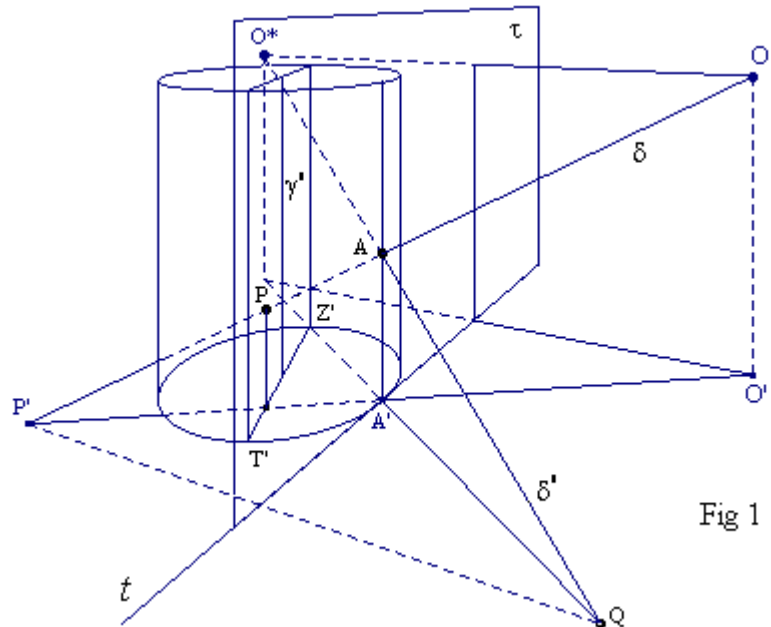


Fig 1

### I. Costruzione geometrica.

Osserviamo intanto che, su  $\pi$ ,  $Q$  è anche il simmetrico di  $P'$  rispetto alla retta  $t$ , tangente alla circonferenza di base del cilindro nel punto  $A'$ , proiezione ortogonale di  $A$  su  $\pi$ . Infatti, per le leggi della riflessione, il raggio riflesso  $\delta'$  si può considerare proveniente da una sorgente  $O^*$  simmetrica di  $O$  rispetto al piano tangente in  $A$  al cilindro. Questo piano ( $\tau$ ) è perpendicolare a  $\pi$ , quindi i punti  $O$  ed  $O^*$  hanno la stessa quota  $h$ , le rette  $OP'$  e  $O^*Q$  sono simmetriche rispetto a  $\tau$  e i loro punti di intersezione con  $\pi$  ( $P'$  e  $Q$ ) sono simmetrici rispetto a  $t$  (intersezione fra  $\tau$  e  $\pi$ ), tangente in  $A'$  alla circonferenza base di  $C$ .

Considerando i triangoli rettangoli simili  $PHP'$  ( $H$  proiezione ortogonale di  $P$  su  $\pi$ ) ed  $OO'P'$  ( $O'$  proiezione ortogonale di  $O$  su  $\pi$ ) si ha (ponendo  $PH = k$ ,  $OO' = h$ ):  $h : k = O'P' : HP'$  (1).

Facciamo ora ruotare il piano  $\gamma'$  attorno alla retta  $T'Z'$  fino a sovrapporlo a  $\pi$ : durante questa rotazione l'allineamento tra  $O$ ,  $P$  e  $P'$  si conserva purché anche  $O$  ruoti intorno ad  $O'$  in modo che  $OO'$  e  $\gamma$  si mantengano paralleli (teorema di Stevin). Quando  $\gamma$  e  $\pi$  saranno sovrapposti,  $O$  e  $P$  si troveranno rispettivamente in  $O^\circ$  e  $P^\circ$ : la situazione sarà quella illustrata in Figura 2 (dove sono rappresentati anche gli altri punti finora considerati su  $\pi$ ).

I punti  $P'$  e  $P^\circ$  si corrispondono allora nella omologia di centro  $O^\circ$  e asse  $T'Z'$ ; mentre i punti  $P'$  e  $Q$  (come abbiamo dimostrato) sono simmetrici rispetto a  $t$ . Dato  $P$  (quindi  $H$ ), la costruzione di  $Q$  (che si può svolgere su  $\pi$ ) è allora immediata.

Da  $H$  condurre la perpendicolare  $HP^\circ (= k)$  alla retta  $T'Z'$  (nel semipiano – di origine  $T'Z'$  – opposto ad  $O'$ ); da  $O'$  spiccare verso  $C'$  – proiezione di  $C$  su  $\pi$  – (lungo la retta  $O'C'$ ) il segmento  $O'O^\circ = h$ ; tracciare le rette  $O^\circ P^\circ$  e  $O'H$  che si incontrano in  $P'$  (si ricava infatti facilmente la (1) dalla similitudine dei triangoli  $P^\circ HP'$  e  $O^\circ O'P'$ ); indicata con  $A'$  l'intersezione della retta  $O'P'$  con la circonferenza di base del cilindro, si disegna la tangente alla circonferenza in  $A'$  ( $t$ ), quindi il simmetrico  $Q$  di  $P'$  rispetto a  $t$ .

La costruzione è eseguibile con riga e compasso (o, più agevolmente, con un software adatto: per esempio, Cabri).

## II. Determinazione delle equazioni.

- Occorrono anzitutto le equazioni della omologia generata dalla proiezione dei

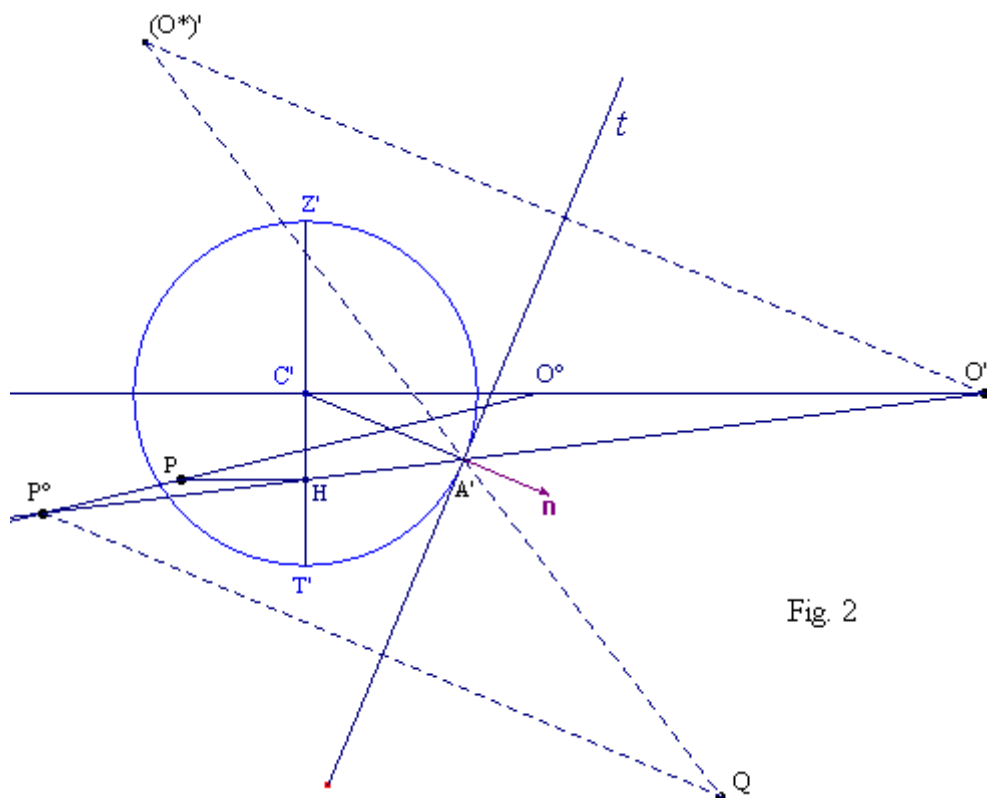


Fig. 2

punti  $P$  (appartenenti a  $\gamma'$ ) nei punti  $P'$  del piano  $\pi$ . Il centro di proiezione è  $O$ . Abbiamo posto  $OO' = O'O^\circ = h$ ; poniamo ora  $OC = O'C' = d$ ; indicando con  $(x; y)$  i punti  $P$  (oppure i punti  $P^\circ$ ), con  $(x'; y')$  i punti  $P'$ , assumendo  $O'C'$  come asse delle ascisse e  $T'Z'$  come asse delle ordinate, si ha:

$$\circ \quad \begin{cases} x' = \frac{hx}{h+y} \\ y' = \frac{dy}{h+y} \end{cases} \quad (1)$$

- Occorrono poi le equazioni della simmetria assiale rispetto a  $t$ , tangente in  $A'$  alla circonferenza (di raggio  $r$ ) base del cilindro. Determiniamo allora (su  $\pi$ ), mantenendo il riferimento in cui sono state scritte le (\*), prima le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta  $A'C'$  (perpendicolare a  $t$ , passante quindi per l'origine  $C'$ ), poi le equazioni della simmetria centrale di centro  $A'$ , punto di coordinate  $(r \cos \vartheta \quad r \sin \vartheta$  dove  $\vartheta = \widehat{C'A'R'}$ : infine, eseguiamo il prodotto di queste due trasformazioni. Si ricava successivamente:

$$(2) \begin{cases} x' = -x' \cos 2\vartheta - y' \sin 2\vartheta \\ y' = x' \sin 2\vartheta - y' \cos 2\vartheta \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x' = 2r \sin \vartheta - x' \\ y' = 2r \cos \vartheta - y' \end{cases}$$

Componendo ordinatamente le (1), (2), (3) e indicando con  $(\bar{x}; \bar{y})$  le coordinate dei punti Q, si ottiene infine:

$$(*) \begin{cases} x = 2r \sin \vartheta - \frac{hx}{h+y} \cos 2\vartheta - \frac{dy}{h+y} \sin 2\vartheta \\ y = 2r \cos \vartheta - \frac{hx}{h+y} \sin 2\vartheta - \frac{dy}{h+y} \cos 2\vartheta \end{cases}$$

equazioni che trasformano i punti  $P(x; y)$  nei punti  $Q(\bar{x}; \bar{y})$ .

III. E' dunque evidente che la costruzione del disegno anamorfico richiede che si parta da un modello fisico (concreto) della figura virtuale (costituita dai punti P) che l'osservatore dovrà vedere guardando nello specchio. Abbiamo supposto che tale modello sia tracciato sul piano  $\gamma'$ : potrebbe tuttavia essere sostituito con una sua proiezione (da O) su uno qualsiasi dei piani che attraversano il diedro avente l'angolo  $\widehat{T\hat{O}Z}$  come sezione normale (Figura 1). Si otterrebbe in tal modo (ma con calcoli meno semplici) il medesimo risultato finale.

---

<sup>(1)</sup> Cfr. anche: J. Baltrušaitis, *Anamorfofi e magia artificiale degli effetti meravigliosi*, Adelphi 1978; Ph. Hickin, *Anamorphosis*, in *The Mathematical Gazette*, Vol. 76, n° 476, July 1992, pag.208.