TASSELLAZIONI

Questa itinerario didattico riguarda le **tassellazioni** (o pavimentazioni) del piano realizzate con **poligoni regolari** (cioè con poligoni aventi tutti i lati e tutti gli angoli congruenti).

Una tassellazione del piano è una collezione di poligoni che godono di alcune proprietà. I poligoni si chiamano **facce** della tassellazione; i loro spigoli (o lati) si dicono **spigoli** della tassellazione; i loro vertici si dicono **vertici** della tassellazione.

Le proprietà da soddisfare sono le seguenti:

- l'unione delle facce ricopre il piano;
- date due facce si verifica una delle seguenti possibilità:
  - sono disgiunte (cioè prive di punti comuni)
  - hanno in comune uno spigolo
  - hanno in comune un vertice
- ogni vertice appartiene ad un numero finito di facce.

Le tassellazioni si incontrano nella vita di tutti i giorni, quando si osserva un pavimento di mattonelle oppure un motivo decorativo come quelli realizzati nell'Alhambra di Granada. Le realizzazioni concrete riguardano numeri finiti di poligoni e regioni limitate del piano e quindi alludono soltanto alle tassellazioni studiate dalla geometria, che richiedono il ricorso a infiniti poligoni. Pur con questo limite, attività didattiche di laboratorio con piastrelle colorate a forma di poligono regolare sono interessanti perché consentono di esplorare regolarità spaziali, di formulare congetture al riguardo e produrre argomentazioni, realizzando anche prodotti esteticamente piacevoli.

Le attività di laboratorio proposte nell'itinerario possono essere realizzate anche in classe con materiali più poveri (poligoni ritagliati nel cartoncino).

Il percorso prevede attività di

- manipolazione di materiale concreto;
- riconoscimento di forme su carte strutturate;
- esecuzione di misure di angoli.

Il percorso si adatta a più età: con gli allievi del primo ciclo è possibile svolgere solo le prime tappe, mentre con allievi di quinta elementare che conoscano l'uso del goniometro si può completare il percorso.

Nelle tavole che seguono sono date alcune informazioni per l'insegnante. Per approfondimenti si può vedere il libro: M. Dedò (1999), Forme: simmetria e topologia, Decibel editrice, Padova (distribuito da Zanichelli). Il percorso si articola in diverse attività: gli allievi di V le realizzeranno tutte in sequenza, gli altri si fermeranno prima.

PRIMA ATTIVITA'

ALLIEVI	**MATERIALE NECESSARIO**	**CONSEGNA**	**INFORMAZIONI PER L'INSEGNANTE**
1 e 2 elementare	20 triangoli 20 quadrati 20 pentagoni 20 esagoni 20 ottagoni Molti fogli in bianco e nero (fotocopie) con i reticoli dei 3 pavimenti possibili. Ogni bambino potrà scegliere un foglio da colorare poi a scuola.	Nella scatola vedi tante piastrelle colorate. Prova a costruire un pavimento che ricopra una parte del tavolo, USANDO TUTTE FORME UGUALI (solo triangoli, oppure solo quadrati, oppure solo pentagoni, oppure solo esagoni)? Ci sono forme adatte a risolvere il problema e forme non adatte? Dopo avere costruito il pavimento cerca nelle carte un pavimento come il tuo. Puoi portare a casa il foglio per poi colorarlo	**Solo** **TRIANGOLI** **QUADRATI** **ESAGONI** **possono tassellare il piano.**

SECONDA ATTIVITA'

ALLIEVI	**MATERIALE NECESSARIO**	**CONSEGNA**	**MATERIALE PER INSEGNANTE**
Dalla 3 elementare	20 triangoli di un colore 20 quadrati " 20 pentagoni " 20 esagoni " 20 ottagoni " 20 decagoni "	Prova a costruire un pavimento che ricopra una parte del tavolo, USANDO SOLO DUE TIPI DI FORME (solo triangoli e quadrati oppure solo quadrati ed esagoni, eccetera). Ci sono coppie di forme adatte a risolvere il problema e forme non	**Solo le coppie:** **TRIANGOLO – QUADRATO** **(due modi possibili)** **TRIANGOLO – ESAGONO** **(due modi possibili)** **QUADRATO – OTTAGONO** **TRIANGOLO –**

	20 dodecagoni “ (meglio se ciascuna di colore diverso) Molti fogli di carta strutturata in bianco e nero (fotocopie) con i reticoli in grandezza naturale dei 6 pavimenti possibili	adatte? Dopo avere costruito il pavimento cerca nelle carte un pavimento come il tuo. Puoi portare a casa il foglio per poi colorarlo	**DODECAGONO** **possono tassellare il piano.** **Il ragionamento si basa ancora su relazioni angolari, ma la giustificazione è un po’ più complessa (vedi bibliografia)**
	20 triangoli di un colore 20 quadrati “ 20 pentagoni “ 20 esagoni “ 20 ottagoni “ 20 decagoni “ 20 dodecagoni “ (meglio se ciascuna di colore diverso) Molti fogli di carta strutturata in bianco e nero (fotocopie) con i reticoli in grandezza naturale degli 2 pavimenti possibili	Prova a costruire un pavimento che ricopra una parte del tavolo, USANDO SOLO TRE TIPI DI FORME (solo triangoli, quadrati ed esagoni oppure solo quadrati, esagoni e decagoni, eccetera). Ci sono coppie di forme adatte a risolvere il problema e forme non adatte? Dopo avere costruito il pavimento cerca nelle carte un pavimento come il tuo. Puoi portare a casa il foglio per poi colorarlo	**Solo le terne:** **TRIANGOLO – QUADRATO – ESAGONO** **QUADRATO – ESAGONO - DODECAGONO** **possono tassellare il piano.** **Il ragionamento si basa ancora su relazioni angolari, ma la giustificazione è un po’ più complessa (vedi bibliografia)**

TERZA ATTIVITA’

ALLIEVI	**MATERIALE NECESSARIO**	**CONSEGNA**	**MATERIALE PER INSEGNANTE**
Dalla 4 elementare	Molti fogli di carta con piccole riproduzioni della carta strutturata degli 3 (A) + 6 (B) + 2 (C) pavimenti possibili Uno dei casi A B C è già risolto come esempio	In ogni casella è segnato un vertice della pavimentazione. Scegli uno dei poligoni che ha quel vertice e gira intorno al vertice in verso orario, annotando tutti i poligoni che incontri (o meglio le loro iniziali). Che cosa osservi? Sulla seconda riga scrivi quello che capita se cambi	Si esplora la situazione in ogni vertice. **Confrontando due vertici qualsiasi della stessa tassellazione si può osservare che si scrivono sempre le iniziali degli stessi poligoni permutate ciclicamente.**

		vertice. Che cosa osservi?	
Dalla 5 elementare	Molti fogli di carta strutturata con reticolo di grandi dimensioni per usare bene il goniometro, ciascuno con una pavimentazione diversa. Almeno 25 goniometri di plastica	Scegli un vertice della pavimentazione e segna la misura di ciascun angolo, dopo avere accuratamente misurato con il goniometro. Poi qui sotto calcola la somma di tutti gli angoli dei poligoni che hanno quel vertice: che cosa osservi?	**Si esplora la situazione in ogni vertice, verificando che la somma degli angoli interni dei poligoni che concorrono in un vertice è sempre 360°.***

Piastrellature regolari

Le misure in gradi degli angoli interni dei poligoni considerati sono dati dalla seguente tabella:

triangolo equilatero	60°
quadrato	90°
pentagono	108°
esagono	120°
ottagono	135°

Solo nei casi del triangolo, del quadrato e dell'esagono la misura in gradi dell'angolo interno è un sottomultiplo di 360° (angolo giro).

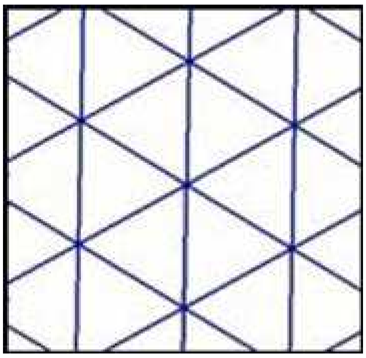


Fig.1

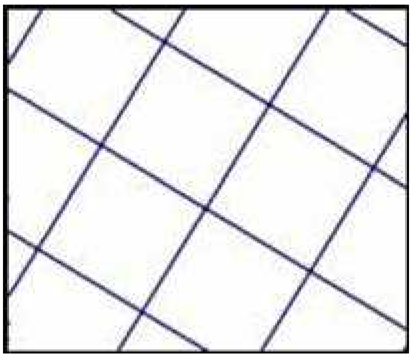


Fig.2

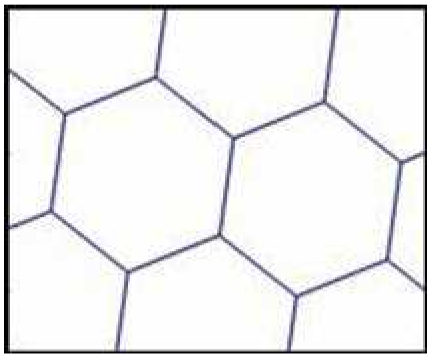


Fig.3

Per un ragionamento più generale: in un poligono regolare di n lati (n-gono), la somma delle misure degli angoli interni è:

$$(n-2)\ 180°,$$

dunque l'ampiezza di ciascun angolo è

$$(n-2)\ 180° : n$$

Se immaginiamo che in un vertice della tassellazione concorrano p n-goni, deve valere l'uguaglianza:

$$(n-2)\ 180° : n = 360° : p$$

da cui si ricava con alcuni passaggi algebrici:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

che dà come sole soluzioni i valori:

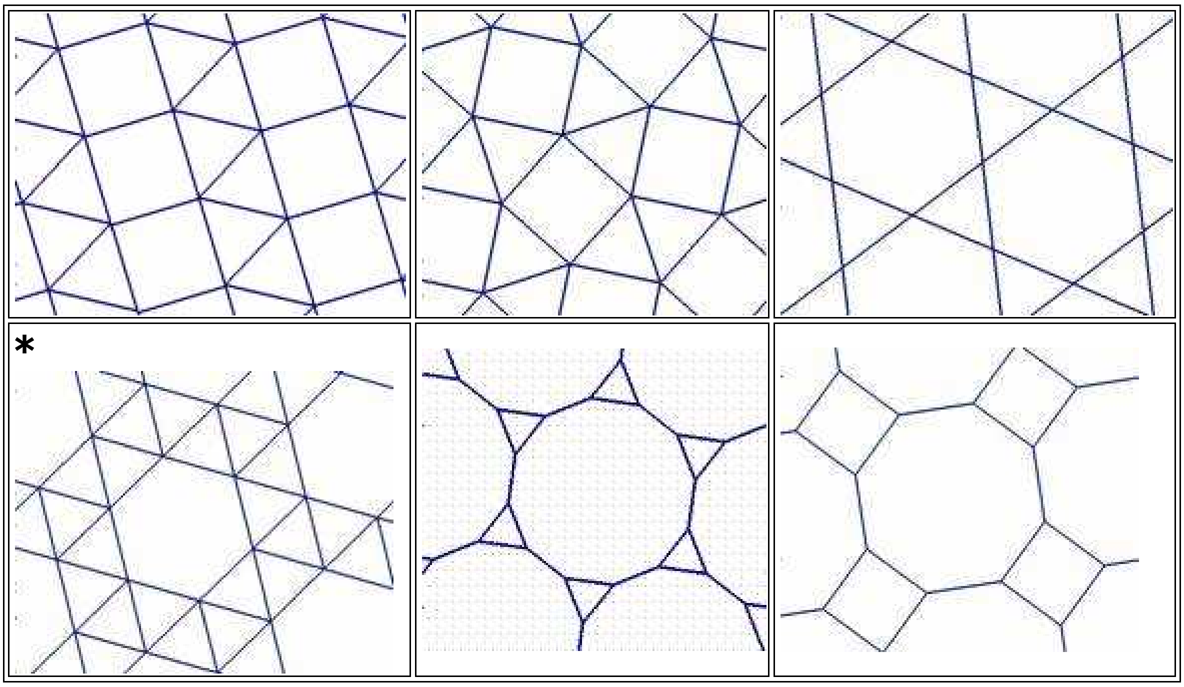
n = 3 , p = 6 (triangolo) (fig.1)

n = 4, p = 4 (quadrato) (fig.2)

n= 6, p = 3 (esagono) (fig.3)

Piastrellature semiregolari

con poligoni di due tipi



La piastrellatura contrassegnata con * può presentarsi con due forme che sono una l’immagina speculare dell’altra (enantiomorfe)

con poligoni di tre tipi