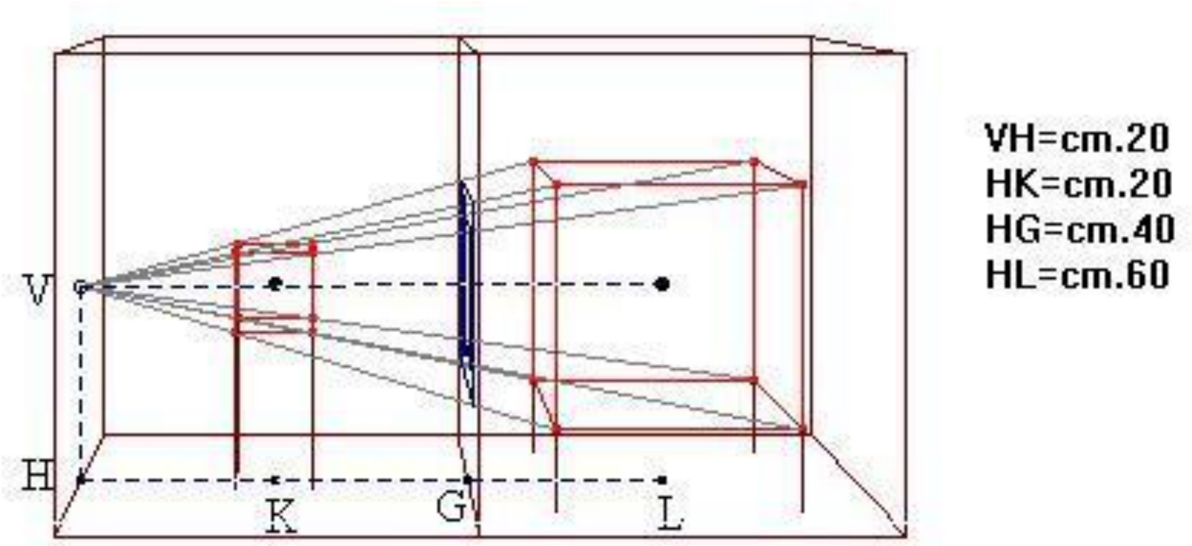
SCHEDA DI APPROFONDIMENTO

I tralicci cubici corrispondenti $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ (nel seguito li chiameremo cubi; i vertici che si corrispondono sono allineati con un punto fisso **V**) individuano, fra gli spazi proiettivi reali sovrapposti $\mathbf{S_3}$ ai quali rispettivamente appartengono, una omotetia avente rapporto 3 e centro **V**. (Si dice **omotetia** una omologia con piano di punti uniti improprio e centro proprio).

1) I cubi sono situati da parti opposte rispetto a una lastra di vetro λ parallela a due facce corrispondenti; il raggio che congiunge a **V** i centri di queste facce è perpendicolare a λ. (Cfr. Tav. 1, in cui sono riportate le misure del modello)



Tav.1

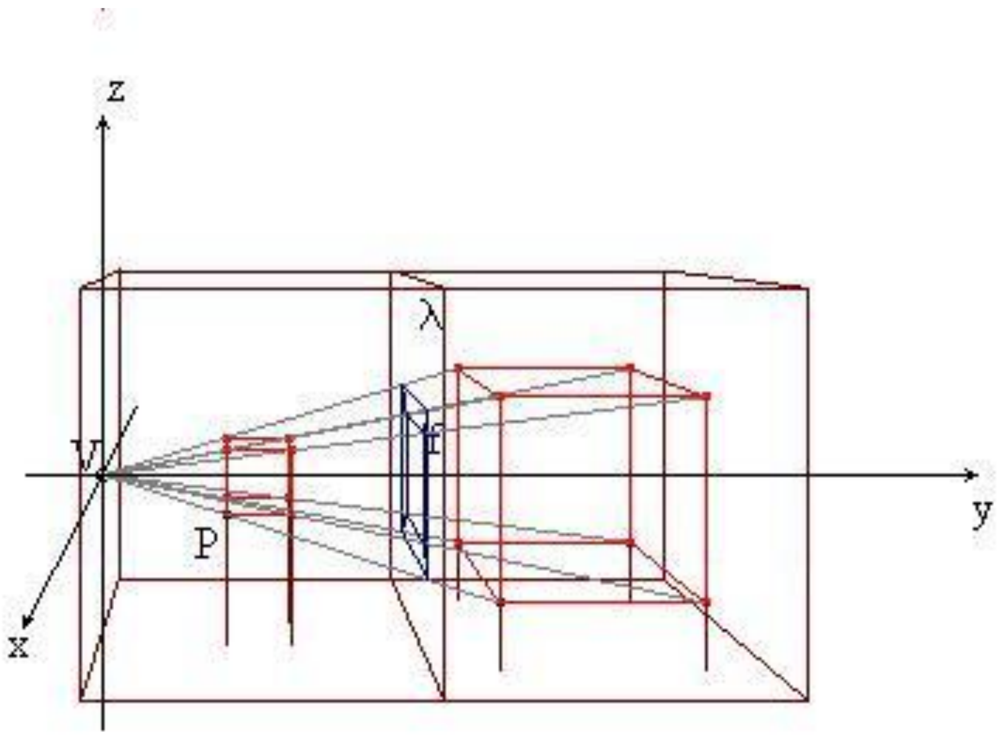
Riferiamo entrambi gli spazi $\mathbf{S_3}$ a una terna di assi cartesiani ortogonali con origine in **V** (asse y perpendicolare a λ) e scriviamo le equazioni dell'omotetia:

$$(*) \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \\ z' = 3z \end{cases}$$

oppure (nel verso opposto)

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \\ z' = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

I raggi che da **V** vanno verso punti appartenenti ai cubi e omologhi secondo la **(*)** intersecano il vetro λ e vi determinano una figura *f* (cfr. Tav.2)



Vengono così a crearsi nuove corrispondenze:

- tra i punti di *f* e le coppie dei punti soddisfacenti alla **(*)** e appartenenti a cubi distinti;

- tra i punti di *f* e i punti di uno dei due cubi.

Usiamo lo stesso riferimento in cui sono state scritte le **(*)**; indichiamo con $\mathbf{P}(x_P, y_P, z_P)$ un punto di $\mathbf{C_1}$ o $\mathbf{C_2}$. Il raggio **VP** è intersezione del piano α, individuato da **P** e dall'asse z, con il piano β, individuato da **P** e dall'asse x.

Equazione di α: $y_P x - x_P y = 0$

Equazione di β: ; $z_P y - y_P = 0$

Equazione del raggio **VP**: $\begin{cases} y_P x - x_P y = 0 \\ z_P y - y_P = 0 \end{cases}$

Equazione del piano λ: (essendo **d** la distanza di λ da V). $y = d$

Intersecando **VP** e λ ricaviamo le coordinate $(x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$ del punto **P'** di *f* corrispondente a **P** (punto di $\mathbf{C_1}$ o $\mathbf{C_2}$):

(**) $\begin{cases} x_{P'} = \frac{d x_P}{y_P} \\ y_{P'} = d \\ z_{P'} = \frac{d z_P}{y_P} \end{cases}$

Consideriamo ora quei raggi che congiungono a **V** punti qualsiasi, ma omologhi nella omotetia **(*)**,degli spazi sovrapposti $\mathbf{S_3}$; anche tali raggi (eventualmente prolungati oltre **V**) intersecano λ. Si hanno così corrispondenze più generali:

- tra i punti di λ e le coppie dei punti (appartenenti ad $\mathbf{S_3}$ distinti) che soddisfano alle **(*)**;

- tra i punti di λ e quelli di uno degli $\mathbf{S_3}$;

Mantenendo il riferimento cartesiano e il metodo utilizzati in precedenza si ricavano le equazioni:

(***) $\begin{cases} x' = \frac{dx}{y} \\ y' = d \\ z' = \frac{dz}{y} \end{cases}$

dove il punto (***x,y,z***) è scelto indifferentemente nell'uno o nell'altro degli $\mathbf{S_3}$ tenendo (se si vuole) conto delle **(*)**.Si nota subito:

- anche immaginando che $\mathbf{C_1}$ o $\mathbf{C_2}$ abbiano come spigoli segmenti geometrici (invece di corpi fisici), la **(**)** risulterà biunivoca solo per posizioni particolari dei cubi rispetto a **V** (ad esempio, la posizione considerata nelle Tav.1-2).
- nemmeno la **(***)** è biunivoca: può diventarlo solo introducendo vincoli opportuni (ad esempio, l'appartenenza del punto (*x,y,z*) a un piano proprio di $\mathbf{S_3}$).

Infatti ogni punto di $\mathbf{S_3}$ ha un unico corrispondente in λ (intersezione con λ del raggio che lo congiunge a **V)**, ma non viceversa.

2) Supponiamo che il cubo più piccolo ($\mathbf{C_1}$) subisca una traslazione, per esempio parallela all'asse delle x. In questo caso, al variare del tempo , fra le coordinate di un suo punto (x_P, y_P, z_P) solo la prima (x_P) subirà variazioni: si abbia

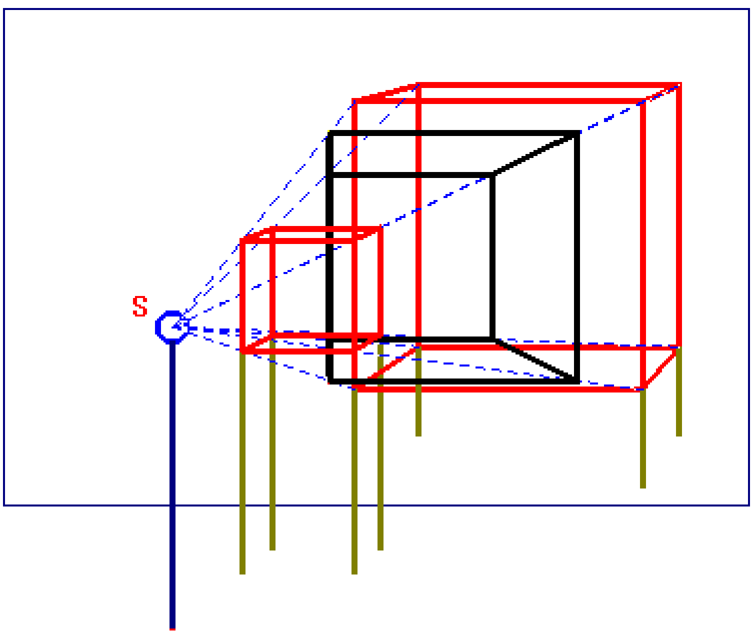
$x_P \rightarrow x_P + f(t)$ *(*dove **f(t)** è una funzione continua del tempo). Anche il cubo più grande ($\mathbf{C_2}$) – in quanto corrispondente di ($\mathbf{C_1}$) nella omotetia **(*)** – e la figura *f* subiranno necessariamente una traslazione parallela all'asse delle x. Le **(**)** diventano:

$$\begin{cases} x_{P'} = \dfrac{d(x_P + f(t))}{y_P} \\ y_{P'} = d \\ z_{P'} = \dfrac{dz_P}{y_P} \end{cases}$$

Il risultato non cambia se a subire la traslazione (parallela all'asse x) è il centro di omotetia **V** oppure il cubo $\mathbf{C_2}$.

In virtù delle corrispondenze studiate in 1):

- in ogni istante la figura *F* è interpretabile sia come "**ombra**" del cubo $\mathbf{C_1}$ (**V** sarebbe in questo caso una luce puntiforme), sia come "**immagine prospettica**" del cubo omotetico $\mathbf{C_2}$ (e allora **V** sarebbe l'occhio dell'osservatore).



Tale conclusione può essere estesa a qualunque coppia di figure omotetiche negli spazi $\mathbf{S_3}$, e a qualunque tipo di traslazione.